Instrukce: Příklady řešte výhradně elementárně, bez použití nástrojů z diferenciálního a integrálního počtu. Je-li součástí řešení úlohy podmnožina reálných čísel, vyjádřete ji jako disjunktní sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

Příklad 1

1. Zapište formulemi predikátového počtu tvrzení, že každá dvě přirozená čísla mají největšího společného dělitele. Můžete použít relaci $a|b$, tedy „a dělí b“.

2. Zapište definici prvočísla ve tvaru

   Číslo n nazýváme prvočíslem, právě když (formule predikátového počtu)

   bez použití relace $a|b$, tedy „a dělí b“.

3. Zapište definici složeného čísla ve tvaru

   Číslo n nazýváme složené, právě když (formule predikátového počtu).

   Můžete použít relaci $a|b$, tedy „a dělí b“.

4. Zapište formulemi predikátového počtu tvrzení, že každé přirozené číslo lze zapsat jako součet nebo rozdíl druhých mocnin dvou různých přirozených čísel, a negaci tohoto tvrzení.

5. ($*$) Zapište formulemi predikátového počtu tvrzení, že pro každou trojici Pythagorejských čísel (tj. přirozených čísel, která jsou délkami stran jednoho pravoúhlého trojúhelníku) platí, že jedno ze dvou menších čísel (délek odvěsen) lze vyjádřit jako rozdíl druhých mocnin dvou přirozených čísel a druhé jako dvojnásobek součinu týchž čísel.

6. Bez použití funkcí min a max zapište formulí predikátového počtu tvrzení, že každá množina reálných čísel má prvek, který není v dané množině největší ani nejmenší, a jeho negaci.

7. Sestavte tabulku závislosti parity funkce $f - g$ na paritě f a g a dokažte.

8. Vyjádřete hodnotu $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ bez použití cyklometrických funkcí.

9. Vyjádřete hodnotu $\operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1)$ bez použití cyklometrických funkcí. Návod: zvažte rozšíření dvěma.

10. ($*$) Vyjádřete hodnotu $2 \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3})$ bez použití cyklometrických funkcí.

11. Nalezněte funkce f a g, pro které platí

    $$\arccos = f \circ \arcsin = \arcsin \circ g$$

    na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a vyjádřete je bez použití goniometrických a cyklometrických funkcí.

12. Nalezněte funkce f a g, pro které platí

    $$\operatorname{arccotg} = f \circ \operatorname{arctg} = \operatorname{arctg} \circ g$$

    na $\mathbb{R}^+$ a vyjádřete je bez použití goniometrických a cyklometrických funkcí.

13. Nalezněte funkci g, pro kterou platí

    $$\operatorname{arctg} = \arcsin \circ g$$

    na $\mathbb{R}$ a vyjádřete ji bez použití goniometrických a cyklometrických funkcí.

14. Nalezněte funkci g, pro kterou platí

    $$\arcsin = \operatorname{arctg} \circ g$$

    na $(-1, 1)$ a vyjádřete ji bez použití goniometrických a cyklometrických funkcí.

15. Nalezněte funkci g, pro kterou platí

$$\operatorname{arccotg} = \arccos \circ g$$

na $\mathbb{R}$ a vyjádřete ji bez použití goniometrických a cyklometrických funkcí.

16. Nalezněte funkci g, pro kterou platí

$$\arccos = \operatorname{arccotg} \circ g$$

na $(-1, 1)$ a vyjádřete ji bez použití goniometrických a cyklometrických funkcí.

Příklad 2

1. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} < \frac{2x-3}{(x+2)(x-1)}.$$

2. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\frac{x+3}{x^2-1} \leq \frac{2x+3}{x^2+3x+2}.$$

3. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\frac{2x+5}{x^2-x-6} \geq \frac{2x+7}{x^2+x-6}.$$

4. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\arccos \frac{x+1}{x-1} - \arccos \frac{x}{1-x} \leq 0.$$

5. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) - \log_{\frac{1}{2}}(x+2) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{2-x}{3-x}.$$

6. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\sin x \sin 2x \geq 0.$$

7. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\sin x < \cos 2x.$$

8. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\sin 2x \geq \operatorname{tg} x.$$

9. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\cos 2x < \cos x.$$

10. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\frac{\cos x}{4x^2 - \pi^2} \leq 0.$$

11. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\frac{\cos x^2}{2^x - 1} \geq 0.$$

12. Nalezněte množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která platí
$$\frac{x \operatorname{tg} x}{x^2 - 1} \geq 0.$$

Příklad 3

1. Nalezněte maximální definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{\arcsin \frac{1}{x}}{\ln(x^2 - x - 2)^2}$$
v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

2. Nalezněte maximální definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{\sqrt{4^x - 5 \cdot 2^x + 4}}{\operatorname{arccotg} \sqrt{\ln(x+1)}}$$
v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

3. Nalezněte maximální definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}}{\ln\left(\frac{3}{2\pi} \arcsin(x^2 - 3) + \frac{1}{4}\right)}$$
v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

4. Nalezněte maximální definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{\arccos(x^2 - x - 1)}$$
v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

5. Nalezněte maximální definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{-x^2} + 1}}{\ln\left(\frac{2}{3\pi}(3 \arccos x - \pi)\right)}$$
v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

6. Nalezněte maximální definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{\ln \arccos(1 - x^2)}{\sqrt{2 + 2^x - 4^x}}$$
v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

7. Nalezněte maximální definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{\sqrt{2 + 2^x - 4^x}}{\arccos \frac{2x^2}{x^4 + 1}}$$
v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

8. Nalezněte maximální definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{\ln \cos^2 x}{\arccos(x^2 - 2x)}$$
v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

9. Nalezněte maximální definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{\sqrt{\arcsin(x^2 - 1)}}{\ln x^2}$$
v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

10. Nalezněte maximální definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\arcsin(x^2 - 2x)}{\ln \ln^2 x}$$

v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

11. Nalezněte maximální definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\arcsin \frac{2x-3}{x-5}}{\ln \ln^2 x}$$

v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

12. Nalezněte maximální definiční obor funkce

$$f(x) = \ln\left(\operatorname{tg} x - \frac{3}{\operatorname{tg} x}\right) + \sqrt[3]{x - \cos x}$$

v $\mathbb{R}$ a zapište jej jako sjednocení intervalů a izolovaných bodů.

Příklad 4

1. Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \left|\frac{|x| - 1}{|x| + 1}\right|$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

2. Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \left|2 - \sqrt{|x| + 1}\right|$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

3. Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \left|\log_2 \frac{x+1}{2}\right|, \; x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right\rangle.$$

Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

4. Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \left|\log_2 \frac{2}{|x| + 1}\right|$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

5. Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \left|\log_2 (1 - x)^2\right|$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

6. Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = \left|2^{1-|x|} - 1\right|$$
pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

7. Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = |2 - 4 \cdot 2^x|$$
pro všechna $x \in \mathbb{R}^-$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

8. Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = -\left|\frac{2}{3}\pi - \arccos(x+1)\right|$$
pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

9. Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = -\left|\frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg} 2|x|\right|$$
pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

10. Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = \left|\operatorname{arccotg}(x-1) - \frac{3}{4}\pi\right|, \ x \in (-\infty, \sqrt{3}+1\rangle.$$
Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

11. Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = \left|\frac{\pi}{4} - \left|\operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right|\right|$$
pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

12. Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = \left|\frac{\pi}{6} - \arcsin(x-1)\right|$$
pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

13. Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = \left|\operatorname{arccotg}(1-x) - \frac{\pi}{3}\right|$$
pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

14. Funkce f je dána předpisem
$$f(x) = 1 - \log_2 \sqrt{|x+1|}$$
pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. Určete $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $\sup f$, $\inf f$, $\max f$, $\min f$, maximální intervaly monotonie f a maximální intervaly konvexnosti a konkávnosti f. Dále rozhodněte, zda je funkce sudá nebo lichá a zda existuje f_{-1}, a načrtněte graf f.

Příklad 5

1. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce
$$f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 2x),$$
určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

2. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce
$$f(x) = \ln^2 x^2,$$
určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

3. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x+2}}{\mathrm{e}^{x^2}},$$
určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

4. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce
$$f(x) = \ln^2 x - 2\ln x - 2,$$
určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

5. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2},$$
určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

6. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce
$$f(x) = 4(x-1)x^2(x+1),$$
určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

7. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce
$$f(x) = x^2(x^2 - 2),$$
určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

8. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce
$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x+3},$$
určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

9. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce
$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x},$$
určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

10. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right),$$

určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

11. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce

$$f(x) = x + \frac{1}{x},$$

určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

12. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1},$$

určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.

13. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je prostá funkce f daná předpisem

$$f(x) = \log_2 4x \cdot \log_2 x$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má výraz vpravo smysl. K restrikcím f na tyto intervaly nalezněte funkce inverzní a určete definiční obory a obory hodnot těchto inverzních funkcí.

14. Nalezněte maximální podmnožiny $\mathbb{R}$, na nichž je prostá funkce

$$f(x) = \arccos \frac{x+1}{x-1},$$

určete inverzní funkce k restrikcím f na tyto množiny a jejich definiční obory a obory hodnot.