Úmluva. Nebude-li řečeno jinak, jsou všechna suprema resp. infima podmnožin reálných čísel v následujícím textu jejich supremy resp. infimy v $\mathbb{R}^*$. Proto každá podmnožina $\mathbb{R}$ supremum i infimum má a jejich hodnoty mohou být i $+\infty$ a $-\infty$.

Poznámka. Následující věty jsou formulovány vždy jen pro jeden z případů duality supremum–infimum. Čtenář si jako cvičení může naformulovat a dokázat duální věty; z hlediska výstavby teorie je budu považovat za dokázané.

Věta 1. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R}$ je horní závora M. Pak $s = \sup M$ právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \exists x \in M : s - x < \varepsilon. \tag{S}$$

Důkaz.
$\Rightarrow$: Sporem. Nechť (S) není splněno, neboli platí

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \, \forall x \in M : s - x \geq \varepsilon. \tag{$\neg$ S}$$

Pak ale pro všechna $x \in M$ platí $x \leq s - \varepsilon$ a tudíž $s - \varepsilon$ je horní závorou M. To je však spor s tím, že s je supremum a tedy nejmenší horní závora M.
$\Leftarrow$: Sporem. Pokud s není supremem M, existuje menší horní závora M, nazvěme ji s'. Protože je s' horní závora, jsou všechny prvky M menší nebo rovny s', neboli

$$\forall x \in M : x \leq s' < s.$$

Pak ovšem $s - x \geq s - s'$, takže pro $\varepsilon \leq s - s'$ není (S) splněno, spor. □

Vysvětlení. Věta 1 říká, že má-li množina konečné supremum, jsou některé její prvky u jejího suprema libovolně blízko, blíže než v libovolné kladné vzdálenosti ε. To může být splněno buď triviálně, když M má maximum (jinými slovy, když do ní její supremum patří), nebo méně triviálně, když supremum prvkem M není (a tedy M maximum nemá), ale libovolně blízko k němu je nekonečně mnoho prvků M – kupříkladu u množin $(0, 1)$ nebo $\{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Věta 2 (Definice ohraničenosti pomocí suprema a infima)**.** Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je shora ohraničená v $\mathbb{R}$ právě tehdy, když $\sup M < +\infty$.

Důkaz.
$\Rightarrow$: $M \subseteq \mathbb{R}$ je podle definice shora ohraničená, pokud

$$\exists K \in \mathbb{R} \, \forall x \in M : x < K.$$

Pak je ovšem K horní závorou M, a to závorou reálnou, neboli menší než $+\infty$. Supremum jako nejmenší horní závora musí být menší nebo rovno K, a je tedy $\sup M \leq K < +\infty$.
$\Leftarrow$: Supremum je (nejmenší) horní závora, a je tedy

$$\forall x \in M : x \leq \sup M.$$

Jakékoli číslo větší než supremum, třeba $\sup M + 1$, tedy splňuje podmínku pro K v definici ohraničenosti shora. □

Vysvětlení. Věta 1 říká, že množina (shora ohraničená, víme z Věty 2) je ke svému konečnému supremu libovolně blízko. Věta 2 toto tvrzení rozšiřuje na neohraničené množiny, ale protože k vyjádření „libovolně blízko“ v tomto případě nelze použít vzdálenost (vzdálenost od nekonečného suprema je vždy nekonečná), využívá uspořádání reálných čísel – je-li $\sup M = +\infty$ „na pravém konci“ reálné osy, měla by se k němu množina „blížit“ tak, že „přeroste“ každé reálné číslo (neboli, nebude shora ohraničená).

Věta 3. $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^* \Rightarrow \sup A \leq \sup B$.

Důkaz. Každá horní závora B je i horní závorou A, protože je-li větší nebo rovna všem prvkům množiny, je samozřejmě větší nebo rovna i všem prvkům její podmnožiny. $\square$

Definice 1. Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}^*$ a $c \in \mathbb{R}^*$. V $\mathbb{R}^*$ definujeme

1. $-A := \{-a; a \in A\}$
2. $A + B := \{a + b; a \in A \wedge b \in B\}$
3. $A - B := \{a - b; a \in A \wedge b \in B\}$
4. $AB := \{ab; a \in A \wedge b \in B\}$
5. $A/B := \{a/b; a \in A \wedge b \in B\}$
6. $|A| := \{|a|; a \in A\}$

Poznámka. Pozorného čtenáře napadne, zda mají definice vždy smysl – například pokud v případě A/B do B náleží nula. Ve skutečnosti je díky tomu, že povolujeme podmnožiny $\mathbb{R}^*$, je možno vytvořit nedefinovaný výraz v každém z případů. Uvedenou definici je však možno brát jako zjednodušený zápis zcela korektní definice, která např. pro případ A/B vypadá takto: $A/B := \{x; x \in \mathbb{R}^* \wedge \exists a \in A\, \exists b \in B : x = a/b\}$.

Věta 4. Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}^*$ a $c \in \mathbb{R}^*$.

1. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
2. $\sup(-A) = -\inf A$
3. $\sup(A + B) = \begin{cases} \sup A + \sup B, & \text{pokud } A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset \\ -\infty & \text{jinak} \end{cases}$
4. $\sup(A - B) = \begin{cases} \sup A - \inf B, & \text{pokud } A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset \\ -\infty & \text{jinak} \end{cases}$

Důkaz.

1. $A, B \subseteq A \cup B$, takže podle Věty 3 je $\sup(A \cup B) \geq \max\{\sup A, \sup B\}$. Zároveň ale každé číslo, které je větší nebo rovné $\max\{\sup A, \sup B\}$, je horní závorou obou množin a tedy i jejich sjednocení, takže $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.
2. Označme D množinu dolních závor množiny A. Pak $\forall d \in D\, \forall a \in A : d \leq \inf A \leq a$ a tedy $-d \geq -\inf A \geq -a$, takže $-D$ je množina horních závor $-A$ a $\sup(-A) = -\inf A$.
3. Případ, kdy je alespoň jedna z množin prázdná, je triviální – součet množin je pak také prázdný, takže jeho supremum je $-\infty$.
   Předpokládejme tedy, že obě množiny jsou neprázdné. K důkazu potřebujeme ekvivalentní vyjádření suprema, proto tvrzení rozdělíme na tři případy podle ohraničenosti množin A, B shora v $\mathbb{R}$:
   a) A i B jsou ohraničené shora, takže jejich suprema jsou konečná. Protože pro každé $a \in A$ je $a \leq \sup A$ a pro každé $b \in B$ je $b \leq \sup B$, je $a + b \leq \sup A + \sup B$, takže $\sup A + \sup B$ je horní závora $A + B$.
      Mějme nyní libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Pak podle Věty 1 existují $a \in A$ a $b \in B$ taková, že $\sup A - a < \frac{\varepsilon}{2}$, $\sup B - b < \frac{\varepsilon}{2}$ (zde může být čtenář zmaten, protože v tvrzení Věty 1 je na pravé straně ε, nikoli jeho polovina; věta však říká, že tvrzení platí *pro každé kladné číslo* ε, tedy i pro takové, které je polovinou toho ε, které jsme si před chvílí zvolili). Odtud $\sup A - a + \sup B - b < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, neboli $\sup A + \sup B - (a + b) < \varepsilon$, což podle Věty 1 znamená, že $\sup A + \sup B = \sup A + B$.
   b) Nechť je jedna z množin shora ohraničená (třeba A) a druhá shora neohraničená (B), takže $\sup A \in \mathbb{R}$, $\sup B = \infty$. Zvolme libovolné $K \in \mathbb{R}$. Pak existuje $b \in B$ takové, že $b > K - \sup A$ (, takže pro každé $a \in A$ je $a + b > K$. $A + B$ je tedy shora neohraničená a podle Věty 2 je $\sup A + B = \infty$.

c) Nechť jsou obě množiny shora neohraničené. Zvolme opět $K \in \mathbb{R}$. Pak existují $a \in A$, $b \in B$ taková, že $a > \frac{K}{2}$, $b > \frac{K}{2}$, a tedy $a + b > K$. Podle Věty 2 je tedy opět $\sup A + B = \infty$.

4. $\sup(A - B) = \sup(A + (-B)) \overset{3.}{=} \sup A + \sup(-B) \overset{2.}{=} \sup A - \inf B$

$\square$

Cvičení. Lze vyslovit pro průnik podobné tvrzení jako pro sjednocení?