Lebesgueův integrál

Jak se pozná: úkolem je určit míru množiny nebo integrál reálné funkce přes množinu, která má stejnou dimenzi jako prostor, ve kterém je obsažena. Obecný postup řešení:

1. **Definice množiny.** Množina může být definována explicitně nerovností či nerovnostmi (např. $A = \{[x, y, z];\ x^2+y^2+z^2 \leq 1 \wedge x^2+y^2 > z^2\}$) nebo je dána svojí hranicí, definovanou rovností či rovnostmi (např. „A je množina ohraničená plochami $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$ a $z = 1$“). Druhý případ je obecně třeba nejprve převést na první, neboli najít explicitní vyjádření množiny pomocí nerovností, které je východiskem k dalšímu výpočtu. V praxi to znamená změnit zadané rovnosti na „správné“ nerovnosti, tedy nerovnosti definující množinu, která se dotýká všech zadaných hraničních ploch. Pokud takovou vlastnost splňuje vícero množin, je zpravidla myšlena ta, která je omezená. Např. ve výše uvedeném příkladě je zřejmé, že mají-li být obě roviny $z = 0$ a $z = 1$ hraničními, musí být množina uzavřená mezi nimi, neboli musí platit $0 \leq z \leq 1$. Správná volba nerovnosti ve zbývající hraniční podmínce je dána požadavkem omezenosti: člen $x^2 + y^2$ je zřejmě omezen zespoda (nulou), shora však jen tehdy, když zvolíme nerovnost $x^2 + y^2 \leq z^2$ (protože z je podle předchozího omezené).

2. **Převedení míry na integrál a symetrie.** Pokud je úkolem zjistit míru (objem, obsah) množiny M, převedeme ji na integrál rovností $\lambda(M) = \int_M 1$. Nikoli nutné, ale velmi efektivní bývá zjistit, zda množina, přes kterou integrujeme, není symetrická a integrovaná funkce zároveň sudá nebo lichá vzhledem k této symetrii. V prostoru $\mathbb{R}^3$ je symetrie množiny M (např. podle x, tedy vzhledem k rovině $x = 0$) formálně podmínka $[x, y, z] \in M \Leftrightarrow [-x, y, z] \in M$, sudost funkce f (opět dle x) $f(-x, y, z) = f(x, y, z)$, lichost $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$ (analogicky v $\mathbb{R}^2$). Pokud je M v některé proměnné symetrická a f ve stejné proměnné sudá, lze integrál napsat jako dvojnásobek integrálu přes (například) kladné hodnoty dané proměnné, v případě liché funkce pokud integrál existuje (o ověření této podmínky více v bodě 3), je nulový. To může vést k podstatnému zjednodušení výpočtu.
■ **Příklad.** Máme spočíst $\int_M (x^2 + |y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \{[x, y, z]; |x| + |y| + |z| \leq 1\}$. Množina M je zjevně symetrická ve všech třech proměnných, integrovaná funkce je ve všech proměnných sudá (z hlediska z jde o konstantní funkci, která samozřejmě je sudá), integrál tedy můžeme přepsat na $8 \int_{\widetilde{M}} (x^2 + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\widetilde{M} = \{[x, y, z]; x + y + z \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$, což je integrál snadno převoditelný na integrál trojný (příklad dopočítán v bodě 3). Jedná se mimochodem o typický příklad, ve kterém není třeba provádět bod 3, tedy substituci. □

3. Ve většině příkladů je třeba provést substituci. Pokud netušíte nic o převádění integrálu přes vícerozměrnou množinu na vícenásobný integrál, přečtěte si nejprve bod 4; postup v příkladech je shodný s naším číslováním, ovšem pro pochopení smyslu substituce je třeba znát princip hledání mezí. **Substituce** je „převedení do nových proměnných“, ve kterých lze lépe najít řez a projekci (neboli meze integrálu, více v bodě 4), formálně jde o zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které zobrazuje množinu s „hezkými mezemi“ na původní množinu, přes kterou integrujeme (nikoli obráceně!). Důležitou roli hraje její **jakobián** J, což je determinant Jacobiho matice (matice parciálních derivací starých proměnných (řádky) podle nových (sloupce)). Nutná je *regularita* substituce, což je podle definice hladkost substituce (spojitost parciálních derivací) v mezích nových proměnných a nenulovost jakobiánu v těchto mezích.

   U následujících „standardních“ substitucí se (není-li řečeno jinak) regularita bere jako samozřejmost, když se o ní zmíníte, zajisté nic nezkazíte. Stejně tak není potřeba počítat jakobián. „Pravé strany“ substitucí lze samozřejmě permutovat. V některých případech to nemá smysl, protože výsledná substituce je ve všem ekvivalentní původní; tam, kde to smysl má, to bude explicitně řečeno. Je-li při charakterizaci množin vhodných pro danou substituci požadováno, aby nerovnosti obsahovaly určitý výraz, je třeba to ověřovat po převedení všeho na jednu stranu nerovnosti, tedy např. nerovnost $x^2 + y^2 < 1 - z^2$ obsahuje v tomto smyslu součet druhých mocnin všech tří proměnných.
   Standardní substituce:
   (a) Polární souřadnice – pro 2D a definice množin s nerovnostmi obsahujícími $x^2 + y^2$:
   $x = r\cos\varphi \qquad r \in (0, \infty)$
   $y = r\sin\varphi \qquad \varphi \in (0, 2\pi)$ nebo libovolný jiný 2π dlouhý interval
   Jakobián: $J = r$

   Demonstrace výpočtu jakobiánu a ověření regularity:

   $$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

Všechny funkce v této matici (neboli všechny parciální derivace substituce) jsou spojité, jakobián je v daných mezích nenulový $\Rightarrow$ substituce je regulární.

Volba jiného intervalu pro φ může být praktická. Například podmínka $x > 0$ (a tedy $\cos\varphi > 0$) by při volbě $\varphi \in (0, 2\pi)$ byla splněna ve dvou intervalech, $(0, \frac{\pi}{2})$ a $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$, což by vedlo k integraci přes oba tyto intervaly. Oproti tomu volba $\varphi \in (-\pi, \pi)$ umožní splnění podmínky v intervalu jednom – $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ – a tedy redukci na jeden integrál.

Pozor, meze polárních souřadnic nelze změnit např. na $\varphi \in (0, \pi)$, $r \in \mathbb{R}$, ačkoli obraz této substituce je také skoro celé $\mathbb{R}^2$. Není ovšem regulární pro $r = 0$.

(b) Zobecněné polární souřadnice – pro 2D a definice množin s nerovnostmi obsahujícími $x^a + y^a,\ a > 0$ (speciálně věnujte pozornost případu $a = 1$):
$x = r\cos^{\frac{2}{a}}\varphi$ $\qquad r \in (0, \infty)$
$y = r\sin^{\frac{2}{a}}\varphi$ $\qquad \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ nebo jiný kvadrant
Jakobián: $J = \frac{2r}{a}(\cos\varphi\sin\varphi)^{\frac{2}{a}-1}$

Pozor, tato substituce nepřevádí do nových souřadnic (skoro) celou rovinu, ale jen jeden kvadrant. Meze nelze rozšířit, protože kromě případu $a = 2$ (což jsou výše popsané polární souřadnice) by jakobián v celých násobcích $\frac{\pi}{2}$ nabýval hodnoty 0. V případě množiny zasahující do více kvadrantů je tedy třeba rozdělit integrál na několik integrálů (pro každý kvadrant jeden) nebo – pokud to lze – využít symetrie.

(c) „Racionální“ substituce – pro 2D množiny sevřené mezi grafy mocnin x, tedy pro množiny tvaru $\{[x, y];\ ax^\alpha < y < bx^\alpha \wedge cy^\beta < x < dy^\beta,\ 0 < a < b,\ 0 < c < d\}$ (má smysl jen pro $\alpha\beta \neq 1$, jinak funkce z obou nerovností popisují stejné křivky, násobené jen různými konstantami, které se protínají jen v 0 a netvoří hranice množiny); zde se substituuje tak, aby po dosazení do nerovnic bylo možno vykrátit proměnné x, y a vyšly konstantní meze pro nové proměnné. Konkrétně zvolíme $y = ux^\alpha,\ x = vy^\beta$, dosadíme za prostřední člen v nerovnicích a dostaneme $ax^\alpha < ux^\alpha < bx^\alpha,\ cy^\beta < vy^\beta < dy^\beta$, z čehož po vykrácení dostaneme pro u, v meze (a, b), resp. (c, d). Ze zvolených rovností pak ještě vyjádříme x, y jako funkce u, v, čímž dostaneme samotnou substituci. Výsledně:
$x = (u^\beta v)^{\frac{1}{1-\alpha\beta}}$ $\qquad u \in (a, b)$
$y = (uv^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha\beta}}$ $\qquad v \in (c, d)$
Jakobián: $J = \frac{1}{\alpha\beta-1}\left(u^{\beta(\alpha+1)}v^{\alpha(\beta+1)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha\beta}}$

V tomto případě se ovšem nepoužívá přímo explicitní substituce, nýbrž se provádí celý postup od volby $y = ux^\alpha,\ x = vy^\beta$ včetně výpočtu jakobiánu. Někdy je množina zadána dvěma nerovnostmi pro stejnou proměnnou, např. $\{[x, y];\ ax^\alpha < y < bx^\alpha \wedge cx^\beta < y < dx^\beta\}$, nebo slovně jako množina omezená grafy funkcí $ax^\alpha, bx^\alpha, cx^\beta, dx^\beta$, což vede na stejnou definici. V takovém případě je třeba jednu z nerovnic převést na „inverzní“ tvar, nejlépe rozdělením na dvě nerovnosti, vyjádřením vnější proměnné a opětným sloučením. Příklad: $\frac{x^2}{3} < y < 2x^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{3} < y \wedge y < 2x^2\right) \Leftrightarrow \left(x^2 < 3y \wedge \frac{y}{2} < x^2\right) \Leftrightarrow \frac{y}{2} < x^2 < 3y \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} < x < \sqrt{3}\sqrt{y}$

(d) Válcové souřadnice – pro 3D a definice množin s nerovnostmi obsahujícími součet druhých mocnin právě dvou proměnných. Za tyto dvě proměnné substituujeme polární souřadnice, za zbylou novou proměnnou t. Pokud tedy definice množiny obsahuje např. součet $x^2 + y^2$, bude substituce
$x = r\cos\varphi$ $\qquad r \in (0, \infty)$
$y = r\sin\varphi$ $\qquad \varphi \in (0, 2\pi)$ nebo libovolný jiný 2π dlouhý interval
$z = t$ $\qquad t \in \mathbb{R}$
Jakobián: $J = r$

(e) Sférické souřadnice – pro 3D a definice množin s nerovnostmi obsahujícími součet druhých mocnin všech tří proměnných. Základní podoba substituce je (čísla v závorkách budou v dalším textu označovat příslušné pravé strany)
$x = r\cos\psi\cos\varphi$ $\qquad (1) \qquad r \in (0, \infty)$
$y = r\cos\psi\sin\varphi$ $\qquad (2) \qquad \varphi \in (0, 2\pi)$ nebo libovolný jiný 2π dlouhý interval
$z = r\sin\psi$ $\qquad (3) \qquad \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
Jakobián: $J = -r^2\cos\psi$

Meze pro ψ nelze libovolně posouvat; teoreticky lze volit intervaly $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, volba jiného než standardního intervalu je však ve všem ekvivalentní a postrádá smysl.

Permutace složek sférických souřadnic nejsou ekvivalentní. To se projeví v případech, kdy nerovnice v definici množiny obsahují kromě součtu tří kvadrátů ještě součet dvou kvadrátů. Pak je za tyto dvě proměnné třeba zvolit to, co je výše přiřazeno x a y, zbylé proměnné pak pravou stranu z.

Na každou substituci lze použít tzv. **lineární transformace**. Vágně řečeno je to vynásobení pravé strany (nenulovou) konstantou a přičtení další konstanty, formálně skládání s lineárním zobrazením. Lineární substituce jsou regulární v celém $\mathbb{R}$, neporuší tedy nijak regularitu substituce, se kterou jsou skládány. Lineární transformace se používá tehdy, když se v nerovnicích definujících množinu vyskytuje tvar požadovaný standardní substitucí, ovšem na místě samotné proměnné je její lineární člen. Pak se pravá strana dané substituce nepřiřadí přímo proměnné, ale právě tomuto lineárnímu členu a proměnná se z rovnosti vyjádří.

■ **Příklad.** Zadání $\frac{x^2}{2}+4y^2<1$ přepíšeme ve tvaru $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+(2y)^2<1$ a použijeme polární souřadnice: $\frac{x}{\sqrt{2}}=r\cos\varphi,\ 2y=r\sin\varphi$, z čehož po vyjádření x,y dostáváme kýženou lineární transformaci polárních souřadnic: $x=\sqrt{2}\,r\cos\varphi,\ y=\frac{1}{2}\,r\sin\varphi$. □

■ **Příklad.** Zadání $x^2+2y^2-1<2x$ přepíšeme na $x^2-2x+(\sqrt{2}\,y)^2<1$ a to pomocí úpravy na čtverec na $(x-1)^2+(\sqrt{2}\,y)^2<2$. Polární souřadnice: $x-1=r\cos\varphi,\ \sqrt{2}\,y=r\sin\varphi$, výsledná substituce $x=r\cos\varphi+1,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\,r\sin\varphi$. □

Lineární transformace nelze použít vždy, když je k tomu vhodná definice množiny. Záleží také na integrované funkci. Například $\int_A\sqrt{x^2+y^2},\ A=\{[x,y];\,2x^2+y^2<1\}$ vede při použití lineární transformace k integrálu z funkce $\sqrt{1+\sin^2\varphi}$, která nemá elementární primitivní funkci, zatímco standardní polární souřadnice vedou k integrálu z $\frac{1}{1+\sin^2\varphi}$, který lze pomocí substituce $u=\operatorname{tg}\varphi$ snadno spočíst. Obecný postup, jak předem rozhodnout, zda lineární transformaci použít či nikoli, neexistuje. Protože častější jsou příklady, kde lineární transformace je vhodná, doporučuji ji zkusit jako první a teprve v případě, že vychází příliš složitý integrál, zkoušet substituci nemodifikovanou.

Pro výpočet jakobiánu je užitečné zopakovat si některá pravidla platná pro determinanty. Protože jsou všechny standardní substituce nejvýše v $\mathbb{R}^3$, stačí pro výpočet jakobiánu Saarusovo pravidlo. Jeho použití lze v některých případech dále zjednodušit „vytknutím“ z řádku či sloupce, neboť vynásobení řádku či sloupce matice konstantou změní její determinant o stejnou multiplikativní konstantu. Např. při výpočtu jakobiánu sférických souřadnic lze ze dvou sloupců vytknout r a z jednoho $\cos\psi$, čímž se determinant zjednoduší (zkuste si). Podstatný důsledek má tato vlastnost determinantů u lineárních transformací. Vynásobíme-li totiž jednu složku substituce konstantou, bude jí pak násoben i celý sloupec Jacobiho matice, ve kterém jsou derivace této složky, a lze ji tedy vytknout před determinant. Oproti tomu aditivní (přičtená) konstanta při derivaci zmizí a v jakobiánu se tedy nijak neprojeví. Při znalosti těchto pravidel a jakobiánů standardních substitucí nemusíme jakobiány lineárně transformovaných substitucí počítat.

■ **Příklad.** Určíme jakobián lineárně transformovaných polárních souřadnic $x=3r\cos\varphi+1,\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\,r\sin\varphi$. Jakobián polárních souřadnic je r, multiplikativní konstanty 3 a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se do výsledného jakobiánu přenesou, aditivní konstantu 1 ignorujeme. Výsledek: $J=\frac{3}{\sqrt{2}}\,r$. □

Vlastní provedení substituce umožňuje **věta o substituci**. Znění z učebního textu J. Malého *Teorie míry a integrálu* ke stejnojmenné přednášce pro obor Matematika:

Nechť $G\subset\mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\varphi:G\to\mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení (substituce) na G a f je funkce na $M\subset\varphi(G)$. Potom

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\varphi^{-1}(M)} f\left(\varphi(t)\right)\left|J_\varphi(t)\right|\,\mathrm{d}t,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Při použití této (stejně jako kterékoli jiné) věty je třeba ověřit předpoklady. Regularita a prostota standardních substitucí (a jejich lineárních transformací) je známa, G je kartézský součin maximálních intervalů jednotlivých nových proměnných (které jsou právě z tohoto důvodu otevřené) a je tedy otevřená, existence integrálu vyplyne z dalšího výpočtu. Je tedy potřeba vyhovět pouze požadavku, aby $M\subset\varphi(G)$. To není samozřejmé, neboť např. pro polární souřadnice je $G=(0,\infty)\times(0,2\pi)$ a $\varphi(G)=\mathbb{R}^2\setminus\{[x,0];x\geq 0\}$, takže jakákoli množina M obsahující část kladné poloosy x tuto podmínku nesplňuje. Protože však $N=\{[x,0];x\in\mathbb{R}\}$ je množina míry nula, má nulovou míru i $M\cap N$ a tedy $\int_M f=\int_{M\setminus N} f$. Tuto rovnost je tedy pro formální správnost před použitím věty o substituci uvést, nicméně její opomenutí není hrubou chybou, neboť nulová míra doplňku obrazů standardních substitucí je známa. Ostatní předpoklady stačí vyjmenovat a konstatovat, že jsou splněny.

Nejobtížnějším krokem při provádění substituce je **určení** množiny $\varphi^{-1}(M)$, neboli **mezí** nových proměnných. V zásadě jde o dosazení „pravých stran" substituce do nerovnic definujících původní množinu. Meze jedné proměnné je třeba určit jako maximální, nezávislé na ostatních; další již mohou řetězově záviset na předchozích.

■ **Příklad.** Mějme $\int_M (x^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kde $M = \{[x,y,z]; x^2+y^2+z^2 \le 16 \wedge y \ge -2\}$. Vzhledem k součtu tří kvadrátů budeme volit sférické souřadnice, druhá podmínka nám napovídá i vhodnou permutaci pravých stran – po dosazení se rozhodně bude lépe pracovat s podmínkou $r\sin\psi \ge 3$, než kdyby byl na levé straně součin dvou goniometrických funkcí, čímž by se do nerovnosti navíc zatáhla i další proměnná φ. Substituce tedy bude vypadat: $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\sin\psi$, $z = r\cos\psi\sin\varphi$. Nyní bychom měli najít vzor množiny M při zobrazení těmito sférickými souřadnicemi. To však není možné, protože M má neprázdný průnik s množinou $N = \{[x,y,0]; x \ge 0, y \in \mathbb{R}\}$, která do obrazu této permutace sférických souřadnic nepatří (lze ji získat dosazením krajních bodů intervalů pro jednotlivé proměnné). Je třeba konstatovat, že $\lambda(N) = 0$ a tedy $\int_M f = \int_{M\setminus N} f$ a proto že můžeme hledat vzor množiny $M \setminus N$, která již je podmnožinou obrazu sférických souřadnic. Při samotném hledání mezí se tento fakt nijak neprojeví; vyjdeme-li ze standardních mezí sférických souřadnic, bude nám automaticky vycházet vzor množiny $M \setminus N$.

Dosazení do nerovnic a úprava dává $r^2 \le 16 \wedge r\sin\psi \ge -2$. Z mezí sférických souřadnic víme, že $r > 0$, první nerovnost tedy dává prozatímní omezení $r \in (0,4\rangle$. Analýza druhé nerovnosti je obtížnější. Z její podoby je zřejmé, že za nezávislou proměnnou budeme volit ψ, v opačném případě bychom museli její meze vyjadřovat pomocí funkce arcsin, což by obecně vedlo k obtížně integrovatelným funkcím. Mechanické vydělení nerovnice $\sin\psi$ by bylo hrubou chybou; neznáme znaménko tohoto členu a neuvažujeme případ, kdy je nulový. Zaprvé je třeba konstatovat, že pokud je $\sin\psi \ge 0$, platí nerovnost automaticky, takže pro $\psi \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$ může být r z celého intervalu $(0,4\rangle$. Pokud je $\sin\psi < 0$ (a tedy $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$), můžeme – nyní už korektně – nerovnici tímto členem vydělit a dostáváme $r \le -\frac{2}{\sin\psi}$. Tím máme pro r již druhé omezení shora; protože platí obě, bude r omezeno vždy menším. Musíme tedy rozhodnout, kdy platí $4 \le -\frac{2}{\sin\psi}$ a kdy nerovnost opačná. Ekvivalentní úpravou dospějeme k nerovnici $\sin\psi \ge -\frac{1}{2}$, která je (v daném oboru) splněna pro $\psi \in \langle -\frac{\pi}{6}, 0)$, opačná nerovnost pro $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$. Nyní si už jen povšimneme, že pro další proměnnou φ nemáme žádnou omezující podmínku a její meze tedy budou (v rámci mezí sférických souřadnic) maximální. Závěr: vzorem množiny $M \setminus N$ při zobrazení sférickými souřadnicemi (tedy množina $\varphi^{-1}(M)$ z věty o substituci) je $A = \Big\{[r,\psi,\varphi]; \varphi \in (0,2\pi), (\psi \in \langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \wedge r \in (0,4\rangle) \vee (\psi \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}) \wedge r \in (0, -\frac{2}{\sin\psi}\rangle)\Big\}$. Použijeme větu o substituci (neboli zaměníme množinu M za A, za x a z dosadíme ze substituce a přidáme absolutní hodnotu jakobiánu):

$$\int_M (x^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_A (r^2\cos^2\psi\cos^2\varphi + r^2\cos^2\psi\sin^2\varphi)\, r^2\cos\psi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_A r^4\cos^3\psi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi$$

a více v dané chvíli nemůžeme udělat, protože potřebujeme následující bod. □

4. **Převedení** integrálu přes vícerozměrnou množinu **na vícenásobný integrál** použitím Fubiniho věty. Nejprve zavedeme pojmy projekce a řezu:

Nechť $M \subset X \times Y$. Množinu $M^x = \{y; [x,y] \in M\}$, $x \in X$ nazveme řezem množiny M (podle daného x), množinu $\Pi_X(M) = \{x; M^x \ne \emptyset\}$ projekcí (do prostoru X). Uvědomte si, že při pevném X je projekce jenom jedna, řezů je tolik, kolik je prvků X. V příkladech bude $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ (pro množiny v $\mathbb{R}^2$) nebo $Y = \mathbb{R}^2$ (pro množiny v $\mathbb{R}^3$).

Fubiniho věta (trivializovaná verze pro prostory $\mathbb{R}^n$ a Lebesgueovu míru):

Nechť f je měřitelná funkce na měřitelné množině $M \subset \mathbb{R}^n$, $\Pi_{\mathbb{R}}(M)$ je měřitelná množina a $\int_M f$ má smysl. Pak

$$\int_M f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\Pi_{\mathbb{R}}(M)} \left(\int_{M^x} f\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Poznamenejme, že $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ (zastupuje tedy $n-1$ proměnných) a že pro převedení na posloupnost jednoduchých integrálů je potřeba větu aplikovat celkem $n-1$-krát.

Na rozdíl od věty o substituci je provedení úpravy podle Fubiniho věty triviální, těžiště spočívá v ověření předpokladů. Měřitelnost funkce plyne z její spojitosti (stačí po částech). Existují i jiné postačující podmínky, v příkladech se ovšem používá výhradně tato. Měřitelnost množiny plyne např. z otevřenosti či uzavřenosti, zobecnit lze tento fakt do tvrzení, že je-li G otevřená množina, je měřitelná každá množina M taková, že $G \subset M \subset \overline{G}$. Toto zobecnění je praktické pro ověření měřitelnosti „polootevřených“ množin, jako je např. A z předchozího příkladu. Existence integrálu plyne například z nezápornosti (či nekladnosti) funkce na celé množině nebo z její omezenosti v případě, že je množina omezená.

■ **Příklad.** Dopočtěme příklad z bodu 1. Podle Fubiniho věty rozdělíme integrál $\int_{\widetilde{M}}(x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\widetilde{M} = \{[x,y,z]; x+y+z \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$ na integrál trojný. Integrovaná funkce je zřejmě spojitá a tedy měřitelná, nezáporná a tedy integrovatelná a množina $\widetilde{M}$ uzavřená a tedy měřitelná. Zvolme za projekční proměnnou např. x a hledejme jeho maximální meze. Přímo v zadání množiny je podmínka $x \geq 0$, z další podmínky plyne $x \leq 1-y-z$. To však ještě není horní mez, hledáme maximální hodnotu přes všechna y, z. Protože je levá strana nerovnosti tím větší, čím menší jsou y a z, je maximální možnou hodnotou $x = 1$. Tedy $\Pi_{\mathbb{R}}(\widetilde{M}) = \langle 0,1\rangle$ (což je uzavřená a tedy měřitelná množina) a $\widetilde{M}^x = \{[y,z]; x+y+z \leq 1 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$. Podle Fubiniho věty

$$\int_{\widetilde{M}}(x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_{\widetilde{M}^x}(x^2+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x.$$

Na vnitřní integrál je potřeba znovu použít Fubiniho větu, včetně ověření předpokladů, které ovšem bývá triviální – v tomto případě ho lze (až na projekci) doslova opsat. Projekční proměnnou budiž třeba y. Hledáme projekci množiny $\widetilde{M}^x$, která už bude obecně záviset na x. Spodní mez y je opět 0, horní omezení $y \leq 1-x-z$ je maximální pro $z = 0$ (pozor, x už je pevná konstanta). Tedy $\Pi_{\mathbb{R}}(\widetilde{M}^x) = \langle 0, 1-x\rangle$ (měřitelná množina) a $\widetilde{M}^{xy} = \{z; x+y+z \leq 1 \wedge z \geq 0\} = \langle 0, 1-x-y\rangle$, takže

$$\int_0^1 \left(\int_{\widetilde{M}^x}(x^2+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}(x^2+y)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

a zbývá integrace pro mateřské školy. □

■ **Příklad.** Dopočtěme příklad z bodu 2. Množina A není otevřená ani uzavřená, ovšem protože $A^\circ \subset A \subset \overline{A^\circ}$, je měřitelná. Takovou nerovnost samozřejmě nesplňuje každá množina (kupříkladu žádná „hrubě“ nesouvislá množina, jako $\mathbb{Q}$ nebo Cantorovo diskontinuum – mají prázdný vnitřek a tedy i jeho uzávěr), množiny z příkladů na Lebesgueův integrál ji ovšem typicky splňovat budou. Funkce $f(r,\psi,\varphi) = r^4\cos^3\psi$ je spojitá všude (tedy i na A) a je tedy měřitelná, kromě toho je na množině A kladná, což zaručuje existenci $\int_A f$. Posledním neověřeným předpokladem je měřitelnost $\Pi_{\mathbb{R}}(M)$, k tomu ovšem potřebujeme zvolit projekční proměnnou. Ta se stane v dvojném integrálu proměnnou vnějšího integrálu a její meze tedy nesmí být závislé na žádné jiné proměnné. To v našem případě splňují ψ a φ. Zvolme např. φ. Její rozmezí v A a tedy i projekce množiny A do ní je $(0,2\pi)$. To je otevřená a tedy měřitelná množina, příslušné řezy jsou

$$A^\varphi = \left\{[r,\psi]; \left(\psi \in \left\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \wedge r \in (0,4\rangle\right) \vee \left(\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right) \wedge r \in \left(0, -\frac{2}{\sin\psi}\right\rangle\right)\right\},$$

takže podle Fubiniho věty

$$\int_A r^4\cos^3\psi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_{A^\varphi} r^4\cos^3\psi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\psi\right)\mathrm{d}\varphi.$$

Na vnitřní integrál znovu použijeme Fubiniho větu, předpoklady lze (stejně jako v předchozím příkladě a jako ve většině příkladů ostatních) opsat z předchozího odstavce. Za projekční proměnnou musíme zvolit ψ, protože meze r jsou na ní závislé. Projekcí tedy bude měřitelná množina $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (uvědomte si, že projekcí množiny do proměnné jsou všechny hodnoty, jichž tato proměnná jako člen uspořádané n-tice v množině nabývá), složitější bude řez - $A^{\varphi\psi}$ bude rovno $(0,4\rangle$ pro $\psi \in \langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ a $(0, -\frac{2}{\sin\psi}\rangle$ pro $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$. S tím se vyrovnáme rozdělením na dva integrály:

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_{A^\varphi} r^4\cos^3\psi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\psi\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}\left(\int_0^{-\frac{2}{\sin\psi}} r^4\cos^3\psi\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\psi + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^4 r^4\cos^3\psi\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\psi\right)\mathrm{d}\varphi,$$

a zbývá už jen mechanická integrace. □

Tím je výklad metody výpočtu Lebesgueova integrálu kompletní. ■

Na závěr ještě poznámky k integraci. Pokud integrand nezávisí na integrační proměnné, jde o integraci konstanty a integraci lze tudíž zaměnit za násobení rozdílem mezí. Kupříkladu v předchozím příkladě lze v závěrečném tvaru vynechat první integrál a nahradit jej násobením 2π. Protože se vzhledem k používaným substitucím často vyskytuje integrace součinů, resp. podílů mocnin funkcí sin a cos, je užitečné zopakovat si integraci takových funkcí.

$$\int \cos^m x \sin^n x \, \mathrm{d}x$$

Pokud je aspoň jedno z čísel m, n liché, vybereme funkci s lichou mocninou (jsou-li liché obě, volíme menší), její první mocninu dáme na konec integrálu a zbylou sudou mocninu převedeme na druhou funkci. Pak už za druhou funkci jednoduše substituujeme. Příklad:

$$\int \cos^5 x \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x,$$

což po substituci $y = \sin x$ vede na triviální integrál z polynomu.

Pokud jsou m i n sudá, použijeme goniometrické vzorce $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, resp. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Není nezbytně nutné si tyto vzorce pamatovat, neboť je lze velmi jednoduše odvodit ze známého vzorce $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. Jejich použitím snížíme mocniny na polovinu. Příklad:

$$\int \cos^6 x \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int (1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x) \, \mathrm{d}x$$

První dva sčítance se integrují triviálně, čtvrtý výše vyloženou metodou pro integraci lichých mocnin goniometrických funkcí. Třetí je sudou mocninou goniometrické funkce a proto znovu použijeme vzorec. Po převedení $\cos^2 2x$ na $\frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$ je už integrace jednoduchá.

Pro integraci složitějších racionálních funkcí s vnitřními goniometrickými funkcemi (například podílů), které už se ovšem v příkladech vyskytují méně často (ve výše uvedeném demonstračním příkladu na Lebesgueův integrál se však podíl vyskytuje), je obecně třeba použít substitucí pro tyto funkce určené. Označme vnější racionální funkci R, $u = \sin x$ a $v = \cos x$. Pak pokud $R(-u, -v) = R(u, v)$, volíme substituci $y = \operatorname{tg} x$, je-li $R(-u, v) = -R(u, v)$, volíme $y = \cos x$ a v případě, že $R(u, -v) = -R(u, v)$, je správnou substitucí $y = \sin x$.

Doplňky a chyby:

1. Opravit ověřování měřitelnosti množin, $G \subset M \subset \overline{G}$ nezaručuje měřitelnost, protože hranice otevřené množiny *může* mít nenulovou míru (diskontinua kladné míry). Místo toho borelovskost, která se na množinách prohnaných substitucí už ověří snadno. Také lze dokázat nulovost míry hranice, pokud je (lokálně ?) lipschitzovským obrazem množiny z $\mathbb{R}^{n-1}$ (například intervalu).

2. U sfér. souř. rozšířit hledání správné permutace – součet dvou kvadrátů může obsahovat nejen množina, ale i funkce, naopak „osamělá“ proměnná volá po nejjednodušší substituci, tedy $r \sin \psi$.

3. Lineární transformace = substituce s konstantní Jacobiho maticí $\Rightarrow$ regularita z regularity Jac. matice. Pozor, to je víc, než je popsáno v textu (tam jsou pouze diagonální matice). Příklady na otáčení ($x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x + y \geq 0$). Rozlišit posunutí, stejnolehlost a otáčení.

4. Doplnit tvrzení Fubinky o existenci vnitřního integrálu s. v. $\Rightarrow$ zjednodušení ověření předpokladů při použití Fubinky na vnitřní $\int$

5. Obecná substituce pro racionální funkce v sinech a kosinech, odvození vyjádření těchto funkcí pomocí substituce.

6. *Skládání substitucí, sférické souřadnice jako složení dvou polárních

7. Obrázek k řezu a projekci

8. Terminologie: zjistit, co je „vícenásobný“ integrál, pokud je to levá strana ve Fub. větě, používat „posloupnost integrálů“

9. Řešený příklady