1. Nalezněte hodnotu limity:

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\mathrm{e}^{-x} + \operatorname{arccotg} x\right) \ln\left(x^{\sqrt{x}} + x^2\right)$$

Protože je celý výraz součinem, zkoušíme v první řadě určit limity obou součinitelů, abychom věděli, zda můžeme použít větu o limitě součinu. V tomto případě tomu tak není, protože e^{-x}, $\operatorname{arccotg} x$ a tedy i jejich součet mají pro $x \to \infty$ limitu 0, oba výrazy v logaritmu, jejich součet i celý logaritmus mají limitu ∞. Je tedy třeba výraz upravit. Protože v obou závorkách je součet, najdeme v každé z nich dominantní („větší") člen a po jeho vytknutí se pomocí věty o limitě součinu můžeme zbavit členu „menšího". Pro $x \to \infty$ je $\operatorname{arccotg} x \simeq \frac{1}{x} \gg \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}$, protože $x \ll \mathrm{e}^x$. Z první závorky tedy budeme vytýkat $\operatorname{arccotg} x$. V argumentu logaritmu je dominantním členem $x^{\sqrt{x}}$, protože základ obou sčítanců je shodný a v jistém okolí nekonečna větší než jedna a exponent prvního z nich je v jistém okolí nekonečna větší než exponent druhého ($\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty > 2$). Provedeme vytknutí:

$$L = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} x \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\operatorname{arccotg} x} + 1\right) \ln\left(x^{\sqrt{x}}\left(1 + x^{2-\sqrt{x}}\right)\right) \tag{1}$$

První závorky se v tuto chvíli již můžeme zbavit. Protože jsme vytkli dominantní člen, má zbylý podíl v závorce limitu nula, což dokážeme formálně pomocí výše zmíněné ekvivalence a dominance a větě o limitě součinu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\operatorname{arccotg} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\operatorname{arccotg} x \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \tag{2}$$

Nahrazení výrazu $\frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}}$ jeho limitou k nekonečnu, což je podle ekvivalence 1, bylo podle věty o limitě součinu možné proto, že výraz v limitě (2) lze rozepsat na součin výrazů $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccotg} x}$, z nichž alespoň jeden (pravý) má konečnou nenulovou limitu. Nulovost limity (2) nás samozřejmě neopravňuje nahradit příslušný výraz v limitě (1) nulou, protože celý výraz v ní nelze rozepsat jako součet, kde by jedním ze sčítanců byl výraz z (2) (přesněji ne tak, aby se tento výraz v druhém sčítanci nevyskytoval). Korektní nahrazení je třeba provést jinak: vzhledem ke zjištěné limitě je limita celé první závorky v (1) rovna 1 (z věty o limitě součtu) a protože je celý výraz v (1) součinem této závorky a zbytku, můžeme podle věty o limitě součinu závorku její limitou nahradit. Zároveň pokračujeme v úpravě logaritmu – vytknutí umožnilo napsat logaritmus součinu jako součet logaritmů:

$$L = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} x \left(\ln x^{\sqrt{x}} + \ln\left(1 + x^{2-\sqrt{x}}\right)\right)$$

Na $\operatorname{arccotg} x$ znova použijeme ekvivalenci, rozšíříme tedy celý výraz $\frac{1}{x}$. Logaritmus se nám rozdělil na součet s dominantním prvním sčítancem (jeho limita je ∞, limita druhého sčítance je 0, protože $\lim\limits_{x\to\infty} x^{2-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{(2-\sqrt{x})\ln x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$), proto tento prvek opět vytkneme:

$$L = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} x \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \ln x^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\ln(1 + x^{2-\sqrt{x}})}{\ln x^{\sqrt{x}}}\right)$$

Podle věty o limitě součinu nahradíme výraz $\frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}}$ a závorku jejich společnou limitou 1 a $\ln x^{\sqrt{x}}$ upravíme podle vzorce pro logaritmus mocniny. Dále už jen zkrátíme $\sqrt{x}$ a dostáváme výsledek:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0,$$

protože pro $x \to \infty$ je $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+ : \ln^{k_1} x \ll x^{k_2}$.