Věta 1 (Rolleova pro jednostranné derivace)**.** Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$, má obě jednostranné derivace na (a,b) a $f(a)=f(b)$. Pak

$$\exists\xi\in(a,b):\left(f'_-(\xi)\le 0\le f'_+(\xi)\right)\vee\left(f'_-(\xi)\ge 0\ge f'_+(\xi)\right).$$

Důkaz. Protože je f spojitá, má podle Weierstrassovy věty na $\langle a,b\rangle$ maximum i minimum. Alespoň jednoho extrému přitom nabývá v (a,b) – pokud má alespoň v jednom bodě (a,b) hodnotu větší nebo rovnu $f(a)$, pak maxima, pokud menší než $f(a)$, pak minima. V maximu pak musí být derivace zleva nezáporná a zleva nekladná a v minimu opačně. □

Označení. Nechť $\{a,b\}\subseteq\mathcal{D}(f)$. Směrnici přímky procházející body $[a,f(a)]$ a $[b,f(b)]$ budeme značit $\varphi_f(a,b)$, neboli

$$\varphi_f(a,b):=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Budeme-li v určitém kontextu pracovat pouze s jednou funkcí a nebude tudíž hrozit nedorozumění, budeme užívat pouze značení $\varphi(a,b)$.

Věta 2 (Lagrangeova pro jednostranné derivace)**.** Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a má obě jednostranné derivace na (a,b). Pak

$$\exists\xi\in(a,b):\left(f'_-(\xi)\le\varphi(a,b)\le f'_+(\xi)\right)\vee\left(f'_-(\xi)\ge\varphi(a,b)\ge f'_+(\xi)\right).$$

Důkaz. $F(x):=f(x)-\varphi(a,b)\,x$ splňuje předpoklady Rolleovy věty pro jednostranné derivace a tudíž existuje $\xi\in(a,b)$ takové, že jedna z hodnot $F'_-(\xi)=f'_-(\xi)-\varphi(a,b)$, $F'_+(\xi)=f'_+(\xi)-\varphi(a,b)$ je nezáporná a druhá nekladná. Tudíž jedna z jednostranných derivací f v ξ je menší nebo rovna a druhá větší nebo rovna $\varphi(a,b)$. □

Lemma 3. Nechť má funkce f v intervalu $\langle a,b\rangle$ zevnitř všude jednostranné derivace. Označme $D=f'_-((a,b\rangle)\cup f'_+(\langle a,b))$. Pak $\exists d_1,d_2\in D: d_1\le\varphi(a,b)\le d_2$.

Důkaz. Lemma říká, že pokud na intervalu $\langle a,b\rangle$ existují zevnitř jednostranné derivace, alespoň jedna v alespoň jednom bodě je větší nebo rovna směrnici $\varphi(a,b)$ a alespoň jedna v alespoň jednom bodě menší nebo rovna téže směrnici. Zkonstruujeme-li stejně jako v důkazu Lagrangeovy věty funkci $F(x):=f(x)-\varphi(a,b)\,x$, převedeme tvrzení lemmatu ekvivalentně na tvrzení, že alespoň jedna jednostranná derivace F nabývá nezáporné a jedna nekladné hodnoty. To je však zřejmé: pokud by to neplatilo, byly by buď obě jednostranné derivace všude kladné nebo všude záporné, takže by F byla (v každém bodě, a tedy i na intervalu) rostoucí nebo klesající, a nemohlo by platit $F(a)=F(b)$, což je spor. □

Poznámka. Díky Lemmatu 3 víme, že není možné, aby měla funkce v celém intervalu I derivaci například $+\infty$. V libovolném podintervalu $\langle x_1,x_2\rangle\subseteq I$ musí mít totiž alespoň jednu jednostrannou derivaci menší nebo rovnu $\varphi(x_1,x_2)$, a tudíž konečnou.

Označení. Směrnici sečny funkce f v bodech a, b označíme

$$\varphi_f(a,b):=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bude-li z kontextu jasné, pro jakou funkci směrnice stanovujeme, budeme dolní index vynechávat.

Lemma 4. Nechť $x_1,x_2,x_3\in\mathcal{D}(f)$, $x_1<x_2<x_3$. Pak $\varphi_f(x_1,x_3)\in\langle\varphi_f(x_1,x_2)|\varphi_f(x_2,x_3)\rangle$.

Důkaz. Zřejmé z náčrtu. Formálně: roznásobíme-li nerovnosti

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \text{ a}$$
$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

jejich jmenovateli a odečteme členy stejné na obou stranách (což jsou ekvivalentní úpravy), dostaneme ve všech případech stejnou nerovnost. Platnost všech tří původních nerovností je tedy ekvivalentní, z každé z nich plynou zbývající dvě. Totéž můžeme udělat pro opačné nerovnosti ($\geq$), takže $\varphi_f(x_1, x_3)$ je vždy mezi $\varphi_f(x_1, x_2)$ a $\varphi_f(x_2, x_3)$. □

Terminologie. Budeme říkat, že funkce má jednostrannou lokální vlastnost v intervalu I **zevnitř**, pokud ji má z obou stran každém vnitřním bodě I, zleva v pravém krajním bodě, je-li součástí I, a zprava v levém krajním bodě, je-li součástí I.

Příklad. Řekneme-li, že je funkce jednostranně rostoucí zevnitř intervalu $\langle a, b\rangle$, znamená to, že je rostoucí zleva i zprava v každém bodě (a, b), zprava v a a zleva v b.

Lemma 5. Nechť jsou obě jednostranné derivace funkce f v bodě c menší resp. větší než $\psi \in \mathbb{R}$. Pak $\exists U \in \mathcal{U}(c)\, \forall x_1, x_2 \in U : (x_1 \leq c \leq x_2 \ \wedge\ x_1 \neq x_2) \Rightarrow \varphi_f(x_1, x_2) < \psi$ resp. $\varphi_f(x_1, x_2) > \psi$.

Důkaz. Nechť $f'_\pm(c) < \psi$. Protože $f'_-(c) = \lim_{x\to c-} \varphi_f(x, c)$, $f'_+(c) = \lim_{x\to c+} \varphi_f(x, c)$, existují $P^- \in \mathcal{P}^-(c)$, $P^+ \in \mathcal{P}^+(c)$ takové, že $\forall x \in P^- \cup P^+ : \varphi_f(x, c) < \psi$ (viz Věta **??**). Mějme nyní libovolné $U \in \mathcal{U}(c)$ takové, že $U \subseteq P^- \cup \{c\} \cup P^+$, a $x_1, x_2 \in U$ takové, že $x_1 \leq c \leq x_2 \wedge x_1 \neq x_2$. Je-li $x_1 = c$ nebo $x_2 = c$, plyne nerovnost $\varphi_f(x_1, x_2) < \psi$ přímo z předchozího. Je-li $x_1 < c < x_2$, je $\varphi_f(x_1, x_2)$ mezi $\varphi_f(x_1, c)$ a $\varphi_f(c, x_2)$ (viz Lemma 4), které jsou obě menší než ψ, je tedy i $\varphi_f(x_1, x_2) < \psi$. □

Věta 6. Má-li funkce f obě jednostranné derivace zevnitř v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak má alespoň v jednom bodě alespoň jednu jednostrannou derivaci větší nebo rovnu $\varphi_f(a, b)$ a alespoň v jednom bodě alespoň jednu jednostrannou derivaci menší nebo rovnu $\varphi_f(a, b)$. Formálně:

$$\exists \xi_1, \xi_2 \in \langle a, b\rangle : (f'_-(\xi_1) \leq \varphi_f(a, b) \vee f'_+(\xi_1) \leq \varphi_f(a, b)) \wedge (f'_-(\xi_2) \geq \varphi_f(a, b) \vee f'_+(\xi_2) \geq \varphi_f(a, b))$$

nebo jednodušeji

$$\exists d_1, d_2 \in \{f'_-(x); x \in (a, b\rangle\} \cup \{f'_+(x); x \in \langle a, b)\} : d_1 \leq \varphi_f(a, b) \leq d_2.$$

Důkaz. Neformálně: Půlíme intervaly počínajíc $\langle a, b\rangle$ a vybíráme ten, mezi jehož krajními body je větší směrnice sečny. Protože ze směrnic na půlkách intervalu je vždy alespoň jedna větší nebo rovna směrnici na celém intervalu, jsou směrnice všech vybíraných intervalů větší nebo rovny $\varphi_f(a, b)$. Půlené intervaly konvergují k jednomu bodu, v jehož každém okolí existuje (na některém z vybraných intervalů) sečna „zleva doprava“ se směrnicí větší nebo rovnou $\varphi_f(a, b)$, takže obě jednostranné derivace v tomto bodě nemohou být menší než tato hodnota.

Formálně: Dokážeme nejprve existenci jednostranné derivace větší nebo rovné $\varphi_f(a, b)$. Definujme posloupnost intervalů $(\langle \alpha_n, \beta_n\rangle)_{n=1}^\infty$ a jejich středů $(\gamma_n)_{n=1}^\infty$ takto: $\langle \alpha_1, \beta_1\rangle := \langle a, b\rangle$, $\gamma_n := \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n)$ a dále

$$\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1}\rangle := \begin{cases} \langle \alpha_n, \gamma_n\rangle\,, & \text{pokud } \varphi_f(\alpha_n, \gamma_n) \geq \varphi_f(\alpha_n, \beta_n), \\ \langle \gamma_n, \beta_n\rangle & \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože alespoň jedna ze směrnic $\varphi_f(\alpha_n, \gamma_n)$, $\varphi_f(\gamma_n, \beta_n)$ je větší nebo rovna $\varphi_f(\alpha_n, \beta_n)$ (Lemma 4), jsou všechny směrnice $\varphi_f(\alpha_n, \beta_n)$ větší nebo rovny $\varphi_f(a, b)$. Posloupnosti (α_n), (β_n) jsou monotónní a mají společnou limitu (viz důkaz Věty ??), označme ji ξ. ξ náleží do každého intervalu $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle$ a protože délka těchto intervalů klesá k nule, je v každém okolí ξ nějaký obsažen. V každém okolí ξ tedy existují body $\alpha_n \leq \xi \leq \beta_n$, $\alpha_n \neq \beta_n$, pro které $\varphi_f(\alpha_n, \beta_n) \geq \varphi_f(a, b)$. Není tudíž možné, aby obě jednostranné derivace v ξ byly menší než $\varphi_f(a, b)$ (Lemma 5).

Existenci jednostranné derivace menší nebo rovné $\varphi_f(a, b)$ dokážeme buď zcela analogicky (pouze budeme vybírat ten z intervalů, na které je směrnice menší), nebo přejdeme k funkci $-f$. Použitím již dokázaného víme, že existuje jednostranná derivace funkce $-f$ větší nebo rovná $\varphi_{-f}(a, b) = -\varphi_f(a, b)$, a tudíž je derivace funkce f v témže bodě z téže strany menší nebo rovna $\varphi_f(a, b)$. □

Poznámka. Věta 6 je užitím nápadně podobná jednostranné verzi Lagrangeovy věty (Věta ??). Obě totiž říkají, že v intervalu je někde jednostranná derivace větší nebo rovna směrnici na tomto intervalu a někde menší nebo rovna (s tím rozdílem, že u Lagrangeovy věty je „někde“ uvnitř intervalu, u Věty 6 to může být i v krajích bodech zevnitř). Lagrangeova věta za dodatečný předpoklad – spojitost funkce – dává silnější závěr, že obojí nastává ve stejném bodě. To však pro většinu elementárních užití nepotřebujeme.

Důsledek 7. Má-li funkce f obě jednostranné derivace zevnitř v intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je buď na $\langle a, b \rangle$ lineární, nebo má alespoň v jednom bodě alespoň jednu jednostrannou derivaci větší než $\varphi_f(a, b)$ a alespoň v jednom bodě alespoň jednu jednostrannou derivaci menší než $\varphi_f(a, b)$.

Důkaz. Pokud funkce není lineární na $\langle a, b \rangle$, pak existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že jedna ze směrnic $\varphi_f(a, x_0)$, $\varphi_f(x_0, b)$ je menší než $\varphi_f(a, b)$ a druhá větší. Podle Věty 6 má f v tom z intervalů $\langle a, x_0 \rangle$, $\langle x_0, b \rangle$, na kterém je směrnice menší, někde zevnitř jednostrannou derivaci menší nebo rovnu této směrnici a tedy i směrnici $\varphi_f(a, b)$ a v druhém analogicky větší. □

Poznámka. Uvědomme si, co nám tento důsledek říká navíc oproti Větě 6. Její tvrzení nevylučuje situaci, kdy jsou například všechny jednostranné derivace větší nebo rovny $\varphi_f(a, b)$ a některé z nich větší. Důsledek nám říká, že to není možné – pokud je nějaká jednostranná derivace větší než $\varphi_f(a, b)$, funkce není lineární (protože pokud lineární je, má všechny jednostranné derivace zevnitř v $\langle a, b \rangle$ rovny $\varphi_f(a, b)$) a musí tedy mít i nějakou jednostrannou derivaci menší než $\varphi_f(a, b)$. Jednostranné (a tedy i oboustranné) derivace na intervalu jsou tedy buď všechny rovny směrnici na tomto intervalu, nebo ji ostře ohraničují shora i zdola.

Věta 8. Má-li funkce v bodě zleva resp. zprava kladnou derivaci, je v tomto bodě zleva resp. zprava rostoucí. Analogicky má-li funkce v bodě zleva resp. zprava derivaci zápornou, je v něm zleva resp. zprava klesající.

Důkaz. Derivace zleva resp. zprava v bodě c je limita směrnic $\varphi_f(c, x)$ v tomto bodě zleva resp. zprava. Má-li funkce f v bodě c kladnou derivaci zleva resp. zprava, jsou $\varphi_f(c, x)$ v nějakém levém resp. pravém okolí c kladné, takže pro x z tohoto okolí $f(x) < f(c)$ resp. $f(c) < f(x)$. Analogicky pro záporné jednostranné derivace. □

Poznámka. Větu nelze rozšířit na případ nezáporných a nekladných derivací, protože nulová derivace neříká o monotonii funkce v bodě nic: funkce $x \mapsto x^3$, $x \mapsto -x^3$, $x \mapsto x^2$, a

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

mají všechny v nule derivaci nula, ovšem první je v tomto bodě rostoucí, druhá klesající, třetí zleva klesající a zprava rostoucí a čtvrtá není ani z jedné strany monotónní.

Věta 9. Nechť je funkce f v bodě c zleva resp. zprava neklesající. Má-li v tomto bodě ze stejné strany derivaci, je tato derivace nezáporná. Analogicky pro nerostoucí funkci a nekladnou derivaci.

Důkaz. Obměna Věty 8: když derivace existuje a je záporná, je funkce v bodě klesající, takže když klesající není, pak derivace neexistuje nebo je nezáporná. První případ je předpokladem existence derivace vyloučen. □

Poznámka. Větu nelze zúžit na ryzí monotonii a kladnou resp. zápornou derivaci – viz příklady ryze monotónních funkcí s nulovou derivací za Větou 8.

Věta 10. Má-li funkce f na intervalu I zevnitř nezáporné (resp. nekladné, resp. kladné, resp. záporné) obě jednostranné derivace, je na tomto intervalu neklesající (resp. nerostoucí, resp. rostoucí, resp. klesající).

Důkaz. Dokážeme jen pro nezáporné derivace, ostatní případy jsou analogické. Mějme libovolné body $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. V intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ zevnitř někde existuje jednostranná derivace menší nebo rovná $\varphi_f(x_1, x_2)$ (Věta 6) a přitom podle předpokladu nezáporná. Je tedy $\varphi_f(x_1, x_2) \geq 0$ a tudíž $f(x_1) \leq f(x_2)$. □

Poznámka. Slabší verze této věty lze dokázat i jinak. Případ pouze kladných resp. pouze záporných jednostranných derivací je nejjednodušší – funkce je pak rostoucí resp. klesající v každém bodě intervalu (Věta 8) a tudíž i na celém intervalu. Tento postup nelze užít v případě nezáporných či nekladných derivací, protože z nulové derivace v bodě neplyne monotonie.

Zpravidla se věta vyslovuje s předpokladem spojitosti, který umožňuje dokázat ji pomocí Lagrangeovy věty – buď za stejných ostatních předpokladů pomocí jednostranné verze, nebo, nejčastěji, s předpokladem existence oboustranné derivace (kromě krajních bodů, kde stačí spojitost) pomocí verze oboustranné.

Důsledek 11. Funkce je na intervalu konstantní právě tehdy, když na něm má zevnitř nulové jednostranné (a tedy ve vnitřních bodech i oboustrannou) derivace.

Důkaz. Jedna implikace je triviální, jednostranné derivace konstantní funkce jsou nulové. Opačně: jsou-li jednostranné derivace zevnitř intervalu nulové, jsou zároveň nekladné i nezáporné a funkce je podle Věty 10 nerostoucí i neklesající, neboli konstantní. □

Věta 12. Má-li spojitá funkce všude na intervalu derivaci, má tato derivace Darbouxovu vlastnost.

Věta 13 (Ekvivalentní charakteristika konvexní funkce)**.** Funkce je konvexní na otevřeném intervalu I právě tehdy, když platí následující podmínky:

a) f'_- a f'_+ existují na celém I,

b) $\forall x \in I : f'_-(x) \leq f'_+(x)$ a

c) $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$.

Důkaz. V celém důkazu budeme předpokládat, že hodnota všech použitých proměnných je z intervalu I.
$\Rightarrow$: Použijeme alternativní definici konvexnosti pomocí směrnic, podle které je funkce konvexní právě tehdy, když platí $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \varphi(x_1, x_2) \leq \varphi(x_1, x_3) \leq \varphi(x_2, x_3)$, přičemž stačí platnost nerovnosti mezi libovolnými dvěma výrazy vpravo, zbylé nerovnosti z ní již plynou.

a) Dokážeme existenci derivace zleva. Podle definice konvexnosti $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \varphi(x_1, x_3) \leq \varphi(x_2, x_3)$, což přímo podle definice monotonie znamená, že funkce $x \mapsto \varphi(x, x_3)$ je vlevo od x_3 neklesající, a tudíž má podle věty o limitě monotónní funkce v x_3 zleva limitu. Tato limita ovšem podle definice není ničím jiným, než derivací funkce f zleva:

$$f'_-(x_3) = \lim_{x \to x_3} \varphi(x, x_3) = \sup_{x < x_3} \varphi(x, x_3)$$

Víme tedy nejen to, že derivace zleva existuje, ale navíc i to, že je suprémem směrnic všech „sečen zleva“. Existenci derivace zprava dokážeme buď stejným způsobem, nebo tak, že přejdeme k funkci $f(-x)$, čímž ji převedeme na derivaci zleva. Derivace zprava bude zjevně infimem směrnic všech „sečen zprava“.

b) Nechť opět $x_1 < x_2 < x_3$. Pak je podle definice $\varphi(x_1, x_2) \leq \varphi(x_2, x_3)$ a tudíž i

$$f'_-(x_2) = \sup_{x<x_2} \varphi(x, x_2) \leq \inf_{x>x_2} \varphi(x_2, x) = f'_+(x_2),$$

protože je-li každý prvek jedné množiny (zde směrnic „sečen zleva“ v x_2) menší nebo roven každému prvku druhé množiny (zde směrnic „sečen zprava“ v x_2), platí stejná nerovnost i mezi suprémem první a infimem druhé množiny.

c) Nechť $x_1 < x_2 < x_3$. Pak $\varphi(x_1, x_2) \leq \varphi(x_1, x_3) \leq \varphi(x_2, x_3)$, takže všechny směrnice „sečen zprava“ v x_1 jsou menší nebo rovny všem směrnicím „sečen zleva“ v x_3 a tudíž

$$f'_+(x_1) = \inf_{x\in(x_1,x_3)} \varphi(x_1, x) \leq \sup_{x\in(x_1,x_3)} \varphi(x, x_3) = f'_-(x_3).$$

$\Leftarrow$: Podle podmínky a) existují všude v I jednostranné derivace. Podle b), c) a poznámky za Lemmatem 3 jsou konečné – pokud by totiž některá byla v bodě x_0 například $+\infty$, musely by být obě jednostranné derivace v každém bodě napravo od x_0 větší nebo rovny, neboli také $+\infty$. Důsledek lemmatu však říká, že není možné, aby měla funkce na intervalu všude (stejnou) nevlastní derivaci. A protože má f všude na I konečné jednostranné derivace, je na celém I spojitá.

Mějme nyní $x_1 < x_2 < x_3$. Funkce f splňuje podmínky Lagrangeovy věty pro jednostranné derivace, kterou použijeme na intervaly $\langle x_1, x_2\rangle$ a $\langle x_2, x_3\rangle$. Dostáváme

$$\exists\xi_1 \in (x_1, x_2) : f'_-(\xi_1) \leq \varphi(x_1, x_2) \leq f'_+(\xi_1) \text{ a}$$
$$\exists\xi_2 \in (x_2, x_3) : f'_-(\xi_2) \leq \varphi(x_2, x_3) \leq f'_+(\xi_2).$$

Vzhledem k podmínce b) platí ze dvou možných nerovností v tvrzení Lagrangeovy věty právě ty uvedené. A protože je $\xi_1 < \xi_2$, platí podle předchozího a podmínky c)

$$\varphi(x_1, x_2) \leq f'_+(\xi_1) \leq f'_-(\xi_2) \leq \varphi(x_2, x_3),$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$