# Metody řešení matematických úloh I

**Naďa Stehlíková, Jaroslav Zhouf**

Předmět Metody řešení matematických úloh I (MŘI) je prvním z řady předmětů zaměřených na základní metody řešení matematických úloh. Jako jediný v průběhu celého studia budoucích učitelů matematiky druhého stupně základní školy a budoucích učitelů střední školy probíhá distanční formou, tedy studenti pro něj nemají stanoveny pevné hodiny v rozvrhu.

Kromě základního cíle tohoto typu předmětu, tj. seznámit studenty s různými metodami řešení matematických úloh, má distanční studium za cíl:
– obohatit formy práce se studenty
– seznámit studenty s dostupnou literaturou
– rozvíjet schopnost formulovat matematický text
– rozvíjet schopnost samostatné práce
– rozvíjet schopnost kritického zhodnocení matematického textu k určitému účelu

**Požadavky k zápočtu**

MŘI zahrnují tři tematické celky – Rovnice a nerovnice, Teorie čísel, Planimetrie. Z každého tematického celku musí student vypracovat **seminární práci**, která má následující obsah:

- povinné úlohy ze zadávacího listu zadané vyučujícím
- úlohy vybrané z určité partie doporučené literatury[1]
- úloha „navíc“ vybraná na základě prostudování doporučené literatury se zdůvodněním jejího výběru (viz poznámka u předchozího bodu)

Každá úloha seminární práce je ohodnocena body a je stanoven minimální bodový zisk na uznání seminární práce.

**Čtvrtá seminární práce** se od předchozích tří liší. Obsahuje zhodnocení prostudované literatury (nejméně dvou titulů) z hlediska jejího použití v předmětu MŘI. Při jejím hodnocení se přihlíží k výběru knih (zda jsou to knihy na úrovni MŘI), k jasné strukturaci textu a přesnosti vyjadřování, k vybraným kritériím posuzování literatury a zejména k autorskému zpracování (do jaké míry autor vyjadřuje své názory na literaturu a musí být jasné, že je s literaturou dobře obeznámen). Pouhé vypsání obsahu knihy nepovede k žádnému bodovému zisku.

Na konci semestru píší studenti **test**. Z každého tématu řeší dvě úlohy a na uznání tématu musí provést 60 procent správného řešení. Úlohy jsou vybírány z přesně určené množiny úloh: úlohy vyznačené v zadávacím listu puntíkem (viz dále) a dále přesně vymezené úlohy z doporučené literatury u jednotlivých témat.

Student má celkem tři pokusy; pokud např. v prvním pokusu napsal úspěšně test z celku Rovnice a jejich soustavy, je mu tato část uznána do druhého pokusu. Na každé téma má půl hodiny.

[1] Nebudou však uznány úlohy, které jsou součástí zadávacích listů, ani úlohy, které jsou u jednotlivých témat určené jako úlohy do písemného testu.

**Organizace v semestru**

Předmět je zařazen v zimním semestru druhého ročníku studia. Začátkem semestru proběhne úvodní setkání všech studentů s vyučujícím, na které dostanou tuto brožuru. Dále jsou stanoveny termíny na odevzdání jednotlivých seminárních prací.

Během semestru připravují studenti seminární práce pomocí doporučené literatury, která je vzhledem k problémům s její dostupností k dispozici na katedře (u sekretářky katedry). Vyučující je k dispozici v konzultačních hodinách, kdy mají studenti možnost diskutovat své problémy. Na konzultaci je vhodné přinést i předchozí pokusy o řešení, které nevedly k cíli.

Studenti odevzdávají seminární práce v předem určených termínech, vyučující je opraví a prostřednictvím nástěnky spraví studenty o výsledku. Nevyhovující seminární práce je možno si opravit.

Seminární práce bude přijata pouze za předpokladu, že bude odevzdána v přijatelné grafické podobě a bude obsahovat všechny náležitosti: jméno, téma, číslo úlohy, případně citaci zdroje, datum odevzdání. Řešení jednotlivých úloh musí být rozepsáno tak, aby byly všechny kroky jasné – řešení je nutno okomentovat. Každá úloha by měla být na zvláštní stránce. U úlohy „navíc" je nutno napsat zdroj, přesné zadání, podrobné řešení a komentář (proč byla právě tato úloha vybrána, jaké obsahuje „záludnosti", v čem spočívá princip jejího řešení apod.).

V průběhu semestru budou některé práce namátkou vybrány a jejich autoři vyzváni k podrobnému vysvětlení postupu (prostřednictvím nástěnky). Každý student bude takto vyzván nejméně **dvakrát**.

**Praktické pokyny**

- Termíny odvezdání seminárních prací budou vyvěšovány na nástěnce stejně jako zadání úloh ze zadávacích listů.
- Seminární práce odevzdávejte vždy přímo vyučujícímu nebo paní sekretářce. Nezapomeňte vedle svého podpisu připsat datum odevzdání. Nechávejte si kopie svých seminárních prací.
- Pokud je seminárni práce vrácena k přepracování či doplnění, musí být znovu podána nejdéle do tři týdnů.
- Knihy se půjčují pouze prezenčně.
- Pokud student nestihne do konce zkouškového období letního semestru splnit všechny povinnosti k zápočtu, může si do následujícího zimního semestru převést nejvýše jeden termín testu a nejvýše jednu seminární práci.

## Řešení rovnic a nerovnic a jejich soustav

Dostanete přiděleny dvě úlohy z I. okruhu a jednu úlohu z II. okruhu.

**Doporučená literatura**

- Prostudujte brožuru: Váňa, J. (1970). *O rovnicích s parametry.* Mladá fronta, Praha. Brožura obsahuje tři kapitoly. Z těchto kapitol si vyberte do své seminární práce dvě úlohy, které tam nejsou řešené (jsou řazeny na konci každé kapitoly). Jedna bude ze třetí kapitoly a druhá z druhé kapitoly.

- Podobně prostudujte kapitolu „Rovnice s celou částí" z brožury: Calda, E. (1995). *Rovnice ve škole neřešené.* Prometheus, Praha. Na konci kapitoly si pak vyberte jednu neřešenou úlohu do své seminární práce. Dále si pročtěte strany 51 – 52 a 30 – 32.

- Z časopisu *Učitel matematiky* prostudujte tyto strany (což neznamená, že nemůžete přečíst časopis celý): březen 1995 – str. 58 – 63; květen 1995 – str. 57 – 58; listopad 1994 – str. 60 – 63; únor 1994 – str. 38 – 40.

Tedy celkem bude seminární práce obsahovat **šest** úloh a **jednu** úlohu „navíc". Každá úloha bude za 5 bodů, ke splnění je nutno dosáhnout 28 bodů.

V zápočtovém testu se mohou objevit úlohy, které jsou vyznačené puntíkem v zadávacím listu, dále úlohy z brožury *O rovnicích s parametry* **příklady** první kapitoly, úloha 2, str. 25 a úloha 8, str. 40, a konečně úlohy z knihy *Odvárko, O.: Metody řešení matematických úloh* strana 87, příklad 2, strana 88, příklad 3, strana 96, příklad 3, strana 98, příklad 6, strana 102, příklad 1.

**Další doporučená literatura:**

Hejný, M. a kol. (1989). *Teória vyučovania matematiky 2.* SPN, Bratislava.
Hruša, K. a kol. (1991). *Úvod do studia matematiky.* Karolinum, UK, Praha.
Herman, J., Kučera, R., Šimša, J. (1998). *Seminář ze středoškolské matematiky.* PřF MU, Brno.
Zedek, M. a kol. (1971). *Vybrané úlohy z matematické olympiády.* SPN Praha.

## Zadávací list

Pokud není uvedeno jinak, všechny úlohy jsou řešeny v oboru reálných čísel. Je-li v úloze uvedeno více rovnic, jedná se o soustavu rovnic. Neznámé jsou označeny $x$, $y$, $z$, parametry $a$, $b$, $c$, $m$ apod.

### I. okruh

1. • Kořeny $x_1$, $x_2$ rovnice $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ vyhovují vztahu $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$. Určete $a$.

2. • Nechť $x_1$, $x_2$ jsou kořeny rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $ac \neq 0$. Vyjádřete pomocí $a$, $b$, $c$, aniž byste řešili danou rovnici, tyto výrazy: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$, $x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_2^4$.

3. • Je dána kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ s kořeny $x_1$, $x_2$. Sestavte kvadratickou rovnici, která má kořeny $y_1 = x_1^2 + x_2^2$, $y_2 = x_1^3 + x_2^3$.

4. $x+y+z=6$, $x^2+y^2+z^2=14$, $xz+yz=(xy+1)^2$.

5. $\sqrt[3]{1+\ln x}+\sqrt[3]{1-\ln x}=2$.

6. • Řešte soustavu rovnic jinak než Gaussovou metodou.

(a) $x_1+x_2+x_3=6$ $\quad$ $x_5+x_6+x_7=-9$

$x_2+x_3+x_4=9$ $\quad$ $x_6+x_7+x_8=-6$

$x_3+x_4+x_5=3$ $\quad$ $x_7+x_8+x_1=-2$

$x_4+x_5+x_6=-3$ $\quad$ $x_8+x_1+x_2=2$.

(b) $x_1+x_2+x_3=0$, $x_2+x_3+x_4=0$, $x_3+x_4+x_5=0$, ......

$x_{99}+x_{100}+x_1=0$, $x_{100}+x_1+x_2=0$.

7. $3^{|x-\frac{1}{4}|+2}-4\sin 2\pi x=5$.

8. $x^2-2x\sin xy+1=0$.

9. • V $\mathbf{R}$ řešte graficky: $1+\sin x+\cos x=0$.

10. $x^2+y=7$, $x+y^2=7$.

11. $x(x+y)+z(x-y)=6$, $y(y+z)+x(y-z)=-2$, $z(z+x)+y(z-x)=3$.

12. $(x^2+1)(y^2+1)=10$, $(x+y)(xy-1)=3$. Návod: Použijte substituci $xy=v$, $x+y=u$.

13. $ax+y=1$, $x+ay=1$.

14. Určete graficky všechny uspořádané dvojice $(x,y)$ celých čísel, které vyhovují soustavě nerovnic: $y-|4-2^{-x}|<0$, $y-1>|x|$.

15. Jak máme zvolit parametr $p$ v kvadratické rovnici $px^2+(2p-1)x-2=0$, aby její kořeny byly z intervalu $\langle -2,2\rangle$?

16. Graficky najděte všechna řešení: $|x+y|\geq 2$, $|x|+|y|<4$.

17. Graficky najděte všechna řešení: $x^2+y^2<11-2(x-2y)$, $x^2+4x\geq 2y-y^2+4$.

18. • $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$

19. $x^2+xy+y^2=4$, $x+xy+y=2$

20. • $x+y=1$, $x^4+y^4=7$

21. • Proveďte diskusi řešitelnosti soustavy $x^2+y^2=4$, $(x+m)^2+(y-m)^2=1$. (Řešte graficky. Stačí diskuse vzhledem k počtu řešení, nemusíte ta řešení hledat.)

22. • $ax-y+2=0$, $x+y-b=0$.

23. $x(x+1)(3x+5y)=144$, $x^2+4x+5y=24$.

24. $x+y=4$, $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=280$

25. $ax + y = a^3$, $x + ay = 1$.

26. $x + xy + y = 11$, $x^2y + xy^2 = 30$.

27. $x + y + z = 3$, $x^3 + y^3 + z^3 = 27$

28. • $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$, $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 19$.

29. • $x_1(x_1 + x_2) = 9$, $x_2(x_1 + x_2) = 16$.

30. • $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = -8$.

31. • $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{13}{6}$, $x_1 + x_2 = 5$.

32. • $x_1^2 + 2x_2^2 = 9$, $(x_1 + 1)^2 + 2(x_2 + 1)^2 = 22$.

33. • $5x_1 + 5x_2 + 2x_1x_2 = -19$, $3x_1x_2 + x_1 + x_2 = -35$.

34. • $x_2^2 - x_1 - 5 = 0$, $\frac{1}{x_2-1} - \frac{1}{x_2+1} = \frac{1}{x_1}$.

35. • $x_1^2 - x_1x_2 = 28$, $x_2^2 - x_1x_2 = -12$.

36. • Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$

37. • Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$

38. • Řešte pomocí vhodné substituce. $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$

39. • Řešte pomocí vhodné substituce. $2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3(x + 4)$

40. • Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 + 8} = 6$

41. • Řešte pomocí vhodné substituce. $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$

42. • Řešte pomocí vhodné substituce. $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1} = 4$

43. Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x + 3 + 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 5$

44. Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$

45. Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}$

46. Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19}$

47. Řešte pomocí vhodné substituce. $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$

## II. okruh

1. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých $x$, $y$, $z$ v závislosti na parametrech $a$, $b$, $c$:

   $x - y + z = 0$, $abx - acy + bcz = 1$, $(a + b)x - (a + c)y + (b + c)z = 0$.

2. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých $x$, $y$, $z$ s parametry $a$, $b$, $c$ pro $a+b+c$ různé do nuly:

   $(b+c)(y+z)-ax=b-c$, $(c+a)(z+x)-by=c-a$, $(a+b)(x+y)-cz=a-b$.

3. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých $x$, $y$, $z$ v závislosti na parametrech $a$, $b$, $c>-1$:

   $y+z+yz=a$, $z+x+zx=b$, $x+y+xy=c$.

4. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých $x$, $y$, $z$ v závislosti na parametrech $a$, $b$, $c>0$ :

   $x(x+y+z)=a^2$, $y(x+y+z)=b^2$, $z(x+y+z)=c^2$.

5. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých $x$, $y$, $z$ v závislosti na parametrech $a$, $b$, $c$:

   $a=\frac{yz}{bz+cy}$, $b=\frac{xz}{cx+az}$, $c=\frac{xy}{ay+bx}$.

6. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic o třech neznámých $x$, $y$, $z$ v závislosti na parametrech $a$, $b$, $c$:

   $x^2+y^2=axyz$, $y^2+z^2=byzx$, $z^2+x^2=czxy$.

7. $x+y+z=13$, $x^2+y^2+z^2=61$, $2yz=x(y+z)$.

8. $x(y+z)=5$, $y(z+x)=8$, $z(x+y)=9$.

9. $x^2+y^2+z^2=14$, $xy+xz-yz=7$, $x+y+z=6$.

10. $x+y+z=0$, $x^2+y^2-z^2=20$, $x^4+y^4-z^4=560$.

11. $x^4+y^4+3\,x^2y^2=109$, $x^2+y^2+xy=13$, $z(x+y)=z+x+y$.

## Teorie čísel

Dostanete přiděleny dvě úlohy ze zadávacího listu (viz nástěnka).

**Doporučená literatura:**

- Davydov, U. S., Znám, Š. (1966). **Teória čísel.** SPN, Bratislava. Z této knihy nastudujte:

  – Neurčité rovnice, strany 38 – 48. Příklady z těchto stran je nutné mít připravené k závěrečnému testu.

  – Neurčité rovnice vyšších stupňů, strany 49 – 55 (Pellova rovnice se několikrát objeví v analytické geometrii).

  – Do seminární práce vyberte jednu úlohu z úloh 203 – 255 a jednu z úloh 256 – 267.

- Herman, J., Kučera, R., Šimša, J. (1996). *Metody řešení matematických úloh I.* Masarykova univerzita, Brno. Z této knihy nastudujte strany 166 – 178 (vyberte jednu úlohu ze cvičení do seminární práce), strany 234 – 237 (opět vyberte jednu úlohu do seminární práce). Příklady z těchto stran mohou být v závěrečném testu.

Práce bude tedy obsahovat **šest** úloh a **jednu** úlohu „navíc“ a bude ohodnocena 35 body, ke splnění nutno dosáhnout 28 bodů.

## Zadávací list

1. Najděte všechna přirozená řešení rovnice $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}$.
2. Najděte všechna celá čísla, která vyhovují rovnici $2xy + x + y = 83$.
3. Ukažte, že diofantovská rovnice má nekonečně mnoho řešení: $x + y = (x - y)^2$
4. Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $(x^2 - 3x + 1)^{x+1} = 1$.
5. • Pro jaká $x$ budou čísla $\frac{x-3}{7}$, $\frac{x-2}{5}$ a $\frac{x-4}{3}$ současně celými čísly?
6. • Pro jaká $x$ budou čísla $\frac{2x+1}{3}$, $\frac{3x+1}{4}$ a $\frac{4x+1}{5}$ současně celými čísly?
7. Řešte v $\mathbf{Z}$ rovnici $3x - 2y + 7z = 5$.
8. Kolika způsoby můžeme rozlít 110 litrů vody do patnácti, třiceti a padesátilitrových nádob?
9. Najděte všechna celá čísla $x$, která mají tu vlastnost, že dělení čísla $3x + 1$ osmi a čísla $3x - 1$ dvanácti vychází beze zbytku.
10. Najděte všechna trojciferná čísla, která při dělení devatenácti dávají zbytek 4 a při dělení třinácti zbytek 2.
11. Dokažte, že pro každé přirozené $n$ platí $3^n | 111\ldots11$ (jedniček je $3^n$).

12. Dokažte, že číslo $17^{19} + 19^{17}$ je dělitelné číslem $17 + 19$.

13. Najděte všechna přirozená čísla $n$, pro která je číslo $2^n - 1$ dělitelné sedmi, a dokažte, že pro žádné $n$ není číslo $2^n + 1$ dělitelné sedmi.

14. Dokažte, že všechna čísla tvaru $7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}$ dávají stejný zbytek při dělení číslem $34\,300$.

15. • Dokažte, že pro každé $n$ přirozené platí $57 | 7^{n+2} + 8^{2n+1}$.

16. Dokažte, že platí $181 | 3^{105} + 4^{105}$.

17. • Dokažte, že je-li $p$ prvočíslo, kde $p > 3$, pak $24 | p^2 - 1$.

18. • Dokažte, že je-li $D(a, 6) = 1$, pak $24 | (a^2 - 1)$. ($D$ znamená největší společný dělitel.)

19. • Dokažte, že pro každé $n$ přirozené platí $120 | n^5 - 5n^3 + 4n$.

20. Dokažte, že pro žádné $n$ přirozené není číslo $2^{n+1} + 5^n$ prvočíslo.

21. • Dokažte, že číslo $n^4 + 4$ není prvočíslo pro žádné číslo $n \geq 2$.

22. Dokažte, že číslo $41^{97} - 26^{79}$ je dělitelné třemi.

23. Dokažte, že číslo $101^{103} + 103^{101}$ je dělitelné číslem 51.

24. Dokažte, že číslo $41^{32} - 26^{25}$ je dělitelné pěti.

25. Dokažte, že neexistují přirozená čísla $a$, $b$ tak, aby bylo číslo $a^3 + b^3 - 3$ dělitelné sedmi.

26. • Je dáno libovolné přirozené číslo s lichým počtem číslic. Od něj odečteme totéž číslo psané pozpátku. Dokažte, že výsledek je dělitelný číslem 99.

27. • Tři celá čísla tvoří geometrickou posloupnost s celočíselným kvocientem. Když k nejmenšímu přičtu 9, dostanu aritmetickou posloupnost. Určete daná čísla.

28. Najděte všechna čtyřciferná čísla tvaru $AABB$, která jsou druhou mocninou přirozeného čísla.

29. • Najděte všechna trojciferná čísla, jejichž jedenáctina je rovna součtu druhých mocnin jejich cifer.

30. Najděte všechna přirozená čísla s první číslicí 6, která se po odstranění této číslice zmenší 25krát.

31. • Najděte všechna čtyřciferná čísla, která jsou druhou mocninou přirozeného čísla taková, že jejich číslice tisíců je stejná jako číslice desítek a číslice stovek je o jedna větší než číslice jednotek.

32. • Druhá mocnina přirozeného čísla je rovna čtyřcifernému číslu, jehož první číslice je 3 a poslední 5. Najděte toto číslo.

33. Najděte dvě čísla, jejichž součin je trojciferné číslo a je třetí mocninou nějakého celého čísla a podíl je druhou mocninou stejného celého čísla.

34. Najděte trojciferná čísla $x$, $y$, víte-li, že $y = 8x$ a že rozdíl $y - x$ i šesticiferné číslo vzniklé zápisem cifer čísla $y$ za ciframi čísla x jsou druhými mocninami přirozených čísel.

35. Ciferný zápis čísla $n^2$, kde $n \in \mathbf{N}$, končí číslicí 5. Dokažte, že číslice stovek je sudá.

36. • Najděte nejmenší přirozené číslo s touto vlastností: jeho ciferný zápis končí číslicí 6 a přesuneme-li tuto číslici na začátek, dostaneme čtyřnásobek hledaného čísla.

V následujících úlohách pracujeme v oboru přirozených čísel, někde je nutno pracovat i s nulou.

37. • Víte, že $2|6$, $6|24$ a $2|24$. Platí to vždycky, tj. jestliže $a|b$ a $b|c$, je i $a|c$? Podobně, $2|6$, $2|24$ a $2|(6+24)$. Platí to vždy, tj. jestliže $a|b$ a $a|c$, je $a|(b+c)$? Svoji odpověď zdůvodněte.

38. • Zjistěte, zda je každé z následujících tvrzení pravdivé nebo nepravdivé. Ta, která jsou pravdivá, dokažte; u těch, která jsou nepravdivá, najděte protipříklad. ($\not|$ znamená „nedělí“)

    (a) Jestliže $a \not| b$ a $b \not| c$, pak $a \not| c$.

    (b) Jestliže $a \not| b$ a $a \not| c$, pak $a \not| (b+c)$.

    (c) Jestliže $a|b$ a $c|d$, pak $ac|bd$.

    (d) Jestliže $a|c$ a $b|c$, pak $ab|c$.

    (e) Jestliže $a|b$, pak $a^2|b^2$.

39. • Jestliže $a|b$ a $b|a$, co můžete říci o $a$ a $b$? Svoji odpověď zdůvodněte.

40. Najděte všechna prvočísla, která jsou o 1 menší než (a) druhá mocnina, (b) třetí mocnina, (c) čtvrtá mocnina nějakého přirozeného čísla.

41. Která prvočísla nemůžeme napsat jako součet dvou celých složených čísel? Svou odpověď zdůvodněte. (Číslo 1 nepovažujeme za složené.)

42. Aritmetická posloupnost je posloupnost čísel ve tvaru $a$, $a+2b$, $a+3b,\dots$, kde $a$ a $b$ jsou celá čísla. Například 3, 7, 11, 15, 19,... je aritmetická posloupnost kde $a = 3$ a $b = 4$. (a) Napište prvních šest členů aritmetické posloupnosti, kde (i) $a = 2$, $b = 3$, (ii) $a = 5$, $b = 8$, (iii) $a = 2$, $b = 4$. (b) Může být každý člen některé aritmetické posloupnosti prvočíslo, tj. je pro nějaká celá čísla $a$ a $b$ možné, že $a$, $a+b$, $a+2b$, $a+3b,\dots$ jsou prvočísla? Svoji odpověď zdůvodněte. (c) Má každá aritmetická posloupnost člen, který je prvočíslem? Vytvořte hypotézu, jak můžeme zjistit, že aritmetická posloupnost má prvočíselný člen.

43. Dokažte, že každé celé číslo tvaru $4k+3$ má prvočíselného dělitele stejného tvaru. Například $35 = 4\cdot 8+3$ a $35 = 5\cdot 7$. Číslo 5 není tvaru $4k+3$, ale 7 ano: $7 = 4\cdot 1+3$.

44. Najděte nejmenší (a) druhou mocninu, (b) třetí mocninu nějakého čísla, jejímž dělitelem je číslo 180. Svoji úvahu vysvětlete. To samé udělejte pro dělitele 1440.

45. Zjistěte, zda jsou následující tvrzení pravdivá nebo nepravdivá. Své odpovědi zdůvodněte.

(a) Nechť $k^2 = 3ab$ pro nějaká celá čísla $k$, $a$, $b$. Pak (i) $3|k$, (ii) $3|a$ nebo $3|b$, (iii) $3|a$ a $3|b$.

(b) Nechť $n^2 = 12ab$ pro nějaká celá čísla $n$, $a$, $b$. Pak (i) $12|n$, (ii) $12|a$ nebo $12|b$, (iii) $12|a$ a $12|b$.

46. • Jaké je nejmenší celé číslo větší než 1, které je současně (a) druhá a třetí mocnina, (b) druhá, třetí a pátá mocnina? Obecně, pokud je prvočíselný rozklad čísla $n$, kde $n = q_1^{a_1} q_2^{a_2} ... q_k^{a_k}$, co můžete říci o exponentech $a_i$, jestliže $n$ je (c) druhá mocnina, (d) třetí mocnina, (e) pátá mocnina, (f) $m$-tá mocnina?

47. Na konci čísla 3!=6 není žádná nula, na konci 5!=120 je jedna nula a na konci 10!=3628800 jsou dvě nuly. Kolik nul je na konci 100!? Svoji úvahu vysvětlete. Kolik nul je na konci čísla 1000!?

48. (a) Najděte všechna prvočísla $p$ taková, že číslo $5p + 1$ je druhá mocnina. Svoji odpověď zdůvodněte. (b) Najděte všechna prvočísla $p$, pro která je číslo $7p + 4$ druhá mocnina. Svoji odpověď zdůvodněte.

49. • Zjistěte, zda jsou následující tvrzení pravdivá nebo nepravdivá. Svoje odpovědi zdůvodněte.

    (a) Jestliže $a^2|b^2$, pak $a|b$. (b) Jestliže $a^a|b^b$, pak $a|b$.

50. Je jasné, že jestliže $6|n$ pro nějaké celé číslo $n$, pak $6|n^2$. Jak to bude v případě:

    (a) Jestliže $6|n^2$, platí pak $6|n$? (b) Jestliže $12|n^2$, platí pak $12|n$?

    (c) Obecně, pro jaký typ celých čísel $m$ platí následující tvrzení: Jestliže $m|n^2$, pak $m|n$.

51. Najděte nejmenší celé číslo, které se rovná (a) jedné polovině druhé mocniny a zároveň jedné třetině třetí mocniny, (b) jedné polovině druhé mocniny, jedné třetině třetí mocniny a zároveň jedné pětině páté mocniny, (c) jedné polovině druhé mocniny, jedné třetině třetí mocniny, jedné pětině páté mocniny a zároveň jedné sedmině sedmé mocniny nějakých přirozených čísel.

52. K očíslování stránek knihy potřebujeme 867 číslic. (Na stranu 9 je třeba jedna číslice, na stranu 37 dvě číslice atd.) (a) Kolik stránek má kniha? (b) Kolikrát se objeví číslice 5?

53. (a) Ukažte, že součin cifer libovolného celého dvojciferného čísla je vždy menší než to číslo (např. $5.7 = 35 < 57$).

    (b) Najděte všechna dvojciferná celá čísla, která se rovnají dvojnásobku součinu svých cifer.

    (c) Formulujte a vyřešte jinou úlohu týkající se dvojciferného celého čísla a součtu jeho cifer.

54. Palindrom je celé číslo (nebo slovo, fráze atd.), které se čte stejně odpředu jako odzadu. Například 131, 2 552, 34 743 jsou palindromy.

    (a) Kolik dvojciferných palindromů existuje? Kolik trojciferných?

    (b) Jaké celé číslo větší než 1 je dělitelem každého čtyřciferného palindromu? Svoji odpověď dokažte.

55. Najděte všechna dvojciferná celá čísla taková, že součin tohoto čísla a čísla, které z něho vznikne obrácením pořadí jeho cifer, je trojciferný palindrom (viz předchozí úloha).

56. Která čísla z množiny $\{1, 11, 111, 1111, 11111, ...\}$ jsou druhé mocniny? Proč? Nebo jinak, existuje druhá mocnina (dvojciferná nebo víceciferná), která má všechny cifry stejné? Zdůvodněte.

57. Najděte všechna dvojciferná celá čísla, jejichž druhé mocniny mají (a) čtyři sudé cifry, (b) čtyři liché cifry.

58. Odvoďte kritérium dělitelnosti 9. Najděte nějaké příklady. Najděte dva příklady čísel (každé o nejméně šesti cifrách), která jsou dělitelná třemi ale ne devíti. Nakonec své kritérium dokažte.

59. Odvoďte kritérium dělitelnosti čtyřmi a osmi. Najděte několik příkladů ilustrujících použití každého kritéria. Dokažte každé kritérium.

60. • Nechť $n$ je trojciferné celé číslo, tj. nechť $n = 100a + 10b + c$. Kritérium: $2a + 3b + c$ je dělitelné sedmi, právě když $n$ je dělitelné sedmi.

    (a) Ilustrujte toto kritérium několika příklady. Pak ho dokažte.

    (b) Odvoďte a dokažte podobné kritérium pro čtyřciferná celá čísla.

61. (a) Když vydělíme přirozené číslo dvěma, dostaneme zbytek 1 a když stejné číslo vydělíme třemi, dostaneme zbytek 2. Najděte nejmenší takové číslo.

    (b) Když vydělíme přirozené číslo dvěma, dostaneme zbytek 1, když stejné číslo vydělíme třemi, dostaneme zbytek 2, když ho vydělíme čtyřmi, dostaneme zbytek 3 a když ho vydělíme pěti, dostaneme zbytek 4. Najděte nejmenší takové číslo.

    (c) Když vydělíme přirozené číslo deseti, dostaneme zbytek 9, když stejné číslo vydělíme devíti, dostaneme zbytek 8,…, když ho vydělíme třemi, dostaneme zbytek 2 a když ho vydělíme dvěma, dostaneme zbytek 1. Najděte nejmenší takové číslo.

62. Nechť $a$, $b$, $c$, $d$ jsou libovolná čtyři přirozená čísla. Dokažte, že $12|(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d)$ (tento součin může být záporný nebo nula).

    NSD = největší společný dělitel, NSN = nejmenší společný násobek.

63. • (a) Nechť $NSD(a, b) = NSD(a, c) = NSD(b, c) = 1$. Platí pak $NSD(a, b, c) = 1$? Zdůvodněte svoji odpověď.

    (b) Obráceně, jestliže $NSD(a, b, c) = 1$, platí $NSD(a, b) = NSD(a, c) = NSD(b, c) = 1$? Zdůvodněte svoji odpověď.

    (c) Jestliže $NSD(a, b) = 1$ a $NSD(b, c) = 1$, platí pak $NSD(a, c) = 1$? Zdůvodněte svoji odpověď.

64. • Pro která přirozená čísla $n$ platí

    (a) $NSD(n + 6, n + 2) = 4$? (b) $NSD(6, n + 3) = 3$? Zdůvodněte.

65. • Pro libovolná dvě přirozená čísla $(a, b)$ platí: $NSD(a, b)|NSN(a, b)$. Dokažte to.

    Poznámka: Číslo nazveme dokonalé, jestliže je rovno součtu svých vlastních dělitelů. Jinými slovy, jestliže jeho dvojnásobek je roven součtu všech jeho dělitelů. Nejmenší dokonalé číslo je 6, dále pak 12. Nechť $d(n)$ značí součet všech dělitelů čísla $n$.

66. Existují čísla $m$, $n$ tak, že $d(n) = d(m)$?

67. Dokažte, že neexistuje číslo $n$ takové, že (a) $d(n) = 2$, (b) $d(n) = 5$. Existuje pro každé číslo $k > 6$ číslo $n$ tak, $d(n) = k$?

68. Popište množinu čísel $n$, pro která je $d(n)$ liché.

69. Pro jaký typ čísel je $d(n)$ větší než $n + \sqrt{n}$?

70. (a) Najděte všechna dokonalá čísla menší než 30. (b) Dokažte, že $496 = 2^4(2^5 - 1)$ je dokonalé číslo.

71. Předpokládejme, že $p$ je prvočíslo. Dokažte, že jestliže $2^p - 1$ je prvočíslo, pak $2^{p-1}(2^p - 1)$ je dokonalé číslo.

72. Jaké cifry na místě jednotek jsou možné pro sudá dokonalá čísla? Dokažte.

**čtverec = druhá mocnina nějakého přirozeného čísla**

73. Každý lichý čtverec můžeme napsat jako $4k + 1$. Dokažte, že $k$ je vždy sudé, tj. každý lichý čtverec můžeme napsat ve tvaru $8l + 1$ pro nějaké číslo $l$.

74. Pro jaký typ čísel $n$ je $8|(n^2 + 7)$?

75. • Dokažte, že každý čtverec můžeme napsat ve tvaru $3k$ nebo $3k + 1$.

76. Pro jaký typ čísel $n$ je a) $5|(n^2+1)$, b) $5|(n^2+2)$, c) $5|(n^2+3)$, d) $5|(n^2+4)$, e) $5|(n^2+5)$?

77. Jaké je největší přirozené číslo, které je dělitelem každého přirozeného čísla tvaru $n^5 - n$?

## Planimetrie – pokyny

Ze zápisového listu dostanete přiděleny dvě úlohy. Řada z těchto úloh je vyřešená v knize Šofr, B.: *Euklidovské geometrické konštrukcie* a Švrček, J.: *Geometrie trojúhelníka.* Často je nutno tyto dvě knihy navzájem kombinovat (např. pro pochopení konstrukce z první knihy je nutné nalézt použité vztahy v druhé knize).

**Doporučená literatura:**

- Odvárko, O. a kol. (1990). *Metody řešení matematických úloh.* SPN, Praha.

  Z této knihy nastudujte strany 115 – 124, příklady mohou být v závěrečném testu.

- Kuřina, F. (1996). *10 pohledů na geometrii.* MÚ AV ČR a Albra, Praha. Z této knihy nastudujte strany 159 – 174, příklady mohou být v závěrečném testu. Dále nastudujte strany 193 – 201 zejména z hlediska metodického. Je zde pěkně ukázáno, jaké fáze by měla mít konstrukční úloha. Podobně je nutno rozpracovat konstrukční úlohy ve vaší seminární práci.

- Kuřina, F. (1990). *Umění vidět v matematice.* SPN, Praha. Nastudujte strany 139 – 143, 159 – 166, dále příklad 79, strana 175 a příklady 84-87. Příklady mohou být v závěrečném testu.

- Maška, O. (1967). *Řešené úlohy z matematiky.* Planimetrie. SNTL, Praha. Z této knihy nastudujte strany 100 – 112, příklady mohou být v závěrečném testu.

- *Rozhledy matematicko-fyzikální:* ročník 63, číslo 7, 9, 10. V každém čísle si přečtěte článek *Michalcová, M., Hejný, M.: Janko Hraško v Paralelolande.* Je zajímavý i z hlediska vaší další praxe. Do seminární práce vyřešte některou z úloh, která je v článku uvedena.

- Šofr, B. (1976). *Euklidovské geometrické konštrukcie.* Alfa, Bratislava. Z této knihy nastudujte strany 30 – 37. Dále strany 49 – 61. („Transformačné metody“ – tato kapitola je shrnutím základních metod planimetrie, proto je důležitá. Snažte se úlohy zde uvedené pochopit.)

  Dále vyberte jednu úlohu, která vás zaujala, a vyřešte v seminární práci.

- Švrček, J. (1998). *Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka.* Karolinum, UK, Praha. Ze stran 28-78 si vyberte některý méně známý pojem o trojúhelníku (např. Simsonova přímka, Morleyova věta apod.) a na jedné či dvou úlohách ukažte jeho použití. Úlohy najděte v literatuře (některé mohou být v té samé knize v části o konstrukci trojúhelníka), nebo je můžete vymyslet. Vyberte si takový pojem, který vás něčím zaujal nebo překvapil, a zdůvodněte svou volbu. Do seminární práce nepřepisujte žádné složité důkazy nebo odvození, stačí srozumitelný výklad pojmu.

Celkem tedy odevzdáte v rámci své seminární práce **pět** úloh a **jednu** „navíc“. Práce bude ohodnocena 30 body, ke splnění nutno dosáhnout 25 bodů.

## Planimetrie – zadávací list

1. Sestrojte deltoid, je-li dán poloměr kružnice vepsané $\varrho$, strany $a$ a $b$.
2. • Sestrojte trojúhelník $ABC$, pokud je dáno: $a$, $v_b$, $t_c$.
3. • Sestrojte trojúhelník $ABC$, pokud je dáno: $v_c$, $\gamma$, $\phi = || < BCD| - | < ACD||$, kde $D$ je pata výšky $v_c$. (Značka $<$ znamená úhel.)
4. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník $ABC$ s přeponou $AB$, pokud je dáno: $c - a = m$, $c - b = n$, kde $m < n$.
5. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník $ABC$ s přeponou $AB$, pokud je dán součet odvěsen $a + b = t$ a výška $v_c$.
6. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník $ABC$ s přeponou $AB$, pokud je dáno: $t_a$, $t_b$.
7. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník $ABC$ ($b = c$), pokud je dán součet stran $a + b = m$ a výška $v$ na základnu..
8. Jsou dány poloměry kružnice opsané a vepsané $r$ a $\varrho$. Dokažte, že existuje rovnoramenný trojúhelník, jestliže platí podmínka $r \geq 2\varrho$ a sestrojte ho.
9. Sestrojte trojúhelník $ABC$, pokud je dán rozdíl $a - b \geq 0$, $t_c$, $\gamma$.
10. Sestrojte trojúhelník $ABC$, pokud je dán součet dvou jeho stran $a + b = n$, třetí strana $c$ a těžnice $t_c$.
11. • Sestrojte trojúhelník $ABC$, pokud je dán poloměr kružnice vepsané a opsané $\varrho$ a $r$ a úhel $\gamma$.
12. Sestrojte trojúhelník $ABC$, pokud je dáno: $b - a$, $r$ (poloměr kružnice opsané), $\varrho$ (poloměr kružnice vepsané).
13. Sestrojte trojúhelník $ABC$, pokud je dáno: $b - a$, $v_c$, $\varrho$ (poloměr kružnice vepsané).
14. Sestrojte trojúhelník $ABC$, pokud je dáno: $v_c$, $t_c$, $\varrho$ (poloměr kružnice vepsané).
15. Jsou dány body $S$, $O$ a přímka $p$. Sestrojte trojúhelník $ABC$ tak, aby střed opsané kružnice byl v bodě $S$, střed vepsané kružnice v bodě $O$ a aby strana ležela na přímce $p$.
16. Sestrojte pravidelný desetiúhelník.
17. Sestrojte pravidelný pětiúhelník.
18. Obvod čtyřúhelníku $ABCD$ je roven číslu $o = 2(|AB| + |BC|)$. Je čtyřúhelník $ABCD$ rovnoběžníkem?
19. Dokažte, že v konvexním čtyřúhelníku je součet čtverců stran roven součtu čtverců úhlopříček a čtyřnásobku čtverce úsečky spojující středy úhlopříček.
20. Má-li nějaký čtyřúhelník se stranami délek $a$, $b$, $c$, $d$ úhlopříčky navzájem kolmé, má každý čtyřúhelník se stranami délek $a$, $b$, $c$, $d$ (v uvedeném pořadí) navzájem kolmé úhlopříčky.

21. • Dokažte, že vrcholy žádného rovnostranného trojúhelníku nelze umístit do uzlových bodů libovolné čtvercové sítě.

22. V rovnoramenném trojúhelníku je součet vzdáleností libovolného bodu základny od ramen konstantní. Dokažte.

23. • Tři kružnice $k$, $l$, $m$ se navzájem dotýkají tak, že jejich středy leží na jedné přímce a kružnice $k$, $l$ (které mají vnější dotyk) jsou vepsané do kružnice $m$. Dokažte, že obsah oblasti, která je vnitřní vzhledem ke kružnici $m$ a vnější vzhledem ke kružnicím $k$, $l$, závisí jen na délce tětivy kružnice $m$, která je společnou tečnou kružnic $k$, $l$ a prochází jejich dotykovým bodem, a nezávisí na poloměru kružnice $m$.

24. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku osa každého úhlu leží mezi těžnicí a výškou, které přísluší k vrcholu stejného úhlu (pokud jsou tyto navzájem různé).

25. Je dán trojúhelník $ABC$, kde úhel $ABC$ není pravý. Nad stranou $AB$ je sestrojen čtverec $ABKL$, který neleží v polorovině $ABC$, podobně nad stranou $BC$ je sestrojen čtverec $CBMN$, který neleží v polorovině $CBA$. Dokažte, že trojúhelníky $ABM$ a $KBC$ jsou shodné.

26. • Určete všechny trojúhelníky o obsahu 18 cm$^2$, které mají jen jednu stranu delší než 6 cm.

27. Najděte všechny tětivové čtyřúhelníky $ABCD$ o obsahu 8 cm$^2$, pro které platí $|AB| = |BC|$ a součet délek úhlopříček je 8 cm.

28. Konvexní čtyřúhelník má obsah 1. Jakou nejmenší délku může mít jeho největší úhlopříčka?

29. Konvexní $n$-úhelník má všechny úhlopříčky shodné. Jakých hodnot může nabývat $n$?

30. Na kružnici $k$ jsou pevně dány body $A$ a $B$ a bod $C$, který je pohyblivý. Určete množinu průsečíků výšek všech trojúhelníků $ABC$.